Feuille d'exercices 19
Intégration

Exercice 1 ●○○ **Vrai ou faux ?** Dire (en justifiant) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (les fonctions sont supposées continues).

1. L'intégrale d'une fonction impaire est nulle.
2. Si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.
3. Si $f > 0$ sur $[0, 1[$ et $f < 0$ sur $]1, 100]$, alors $\int_0^{100} f < 0$.
4. L'intégrale d'une fonction minorée par 1 est minorée par 1.
5. L'intégrale d'une fonction qui ne s'annulent qu'au deux extrémités de l'intervale d'intégration n'est pas nulle.
6. Si pour tout $x \in [-3, 3]$, on a $f(x) \leqslant x^3$, alors $\int_{-3}^3 f \leqslant 0$.
7. Il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\int_0^1 f = f(c)$.
8. Il existe $c \in [-1, 1]$ tel que $\int_{-1}^1 f = f(c)$.

Exercice 2 ●●○ **LE classique : intégrales de Wallis** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que
$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, positive et décroissante.
4. En déduire que la suite (I_n) converge.
5. Montrer par une intégration par parties que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression explicite de I_{2p} et I_{2p+1}.
7. Déduire également que
$$\forall n \geqslant 0, \quad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$
8. En déduire que $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$.
9. Montre que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
10. Montrer que
$$I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Correction :
Méthode :
Détails :

1. On a
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$
2. Comment transformer un sinus en cosinus ? On effectue dans I_n le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ (et donc $u = \frac{\pi}{2} - t$) :
$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(\frac{\pi}{2} - u))^n (-\,\mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \,\mathrm{d}u.$$
3. On a
$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 0 \leqslant \sin t \leqslant 1$$
et donc en intégrant cette inégalité
$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{2},$$
ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et bornée.
Montrons la décroissance de la suite : soient $m \leqslant n$ deux entiers, on rappelle que si $x \in [0, 1]$, on a alors $x^n \leqslant x^m$. Ainsi on a
$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (\sin t)^n \leqslant (\sin t)^m.$$
En intégrant cette inégalité entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient
$$I_n \leqslant I_m.$$
On a montré que
$$m \leqslant n \implies I_n \leqslant I_m,$$
cela prouve que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
4. La suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.

5. On a

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{n+2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\times(\sin t)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)(\sin t)^n\,\mathrm{d}t$$
$$=I_n-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(\sin t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Le deuxième terme se calcule par intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t(\sin t)^n\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos t}_{u}\times\underbrace{(\cos t\sin^n t)}_{v'}\,\mathrm{d}t$$
$$=[\cos t\times\frac{\sin^{n+1}t}{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\times\frac{(\sin t)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t$$
$$=0+\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{n+2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}I_{n+2}$$

Ainsi, on déduit

$$I_{n+2}=I_n-\frac{1}{n+1}I_{n+2}$$

et on déduit la relation demandée rapidement.

6. Il est classique (vu en cours) que

$$I_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}I_0\quad\text{et}\quad I_{2p+1}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}I_1,$$

les termes initiaux I_0 et I_1 ayant été déjà calculés.

7. Soit $n\geqslant 0$, la partie de droite découle directement de $0<I_n\leqslant I_{n+1}$.
On déduit en combinant $I_{n+1}\geqslant I_{n+2}$ et **Q5** que

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}\geqslant\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}$$

8. La question précédente et le théorème d'encadrement donnent

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1,$$

ce qui est la définition de $I_{n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}I_n$.

9. Découle directement de l'expression explicite (**Q6**).

10. Puisque $I_{n+1}\underset{n\to\infty}{\sim}I_n$, on a d'après la question précédente, et par produit d'équivalents :

$$I_n^2\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2(n+1)}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2n},$$

et on déduit le résulat en prenant la racine de cet équivalent, ce qui est licite.

Instant culture : Ces intégrales peuvent servir à montrer la formule de Stirling :

$$n!\underset{n\to\infty}{\sim}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n},$$

formule étonante car elle relie les nombres e,π, et la suite (entière) des factorielles.

Exercice 3 ●●○ — Changements de variable, le retour

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2}\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,\mathrm{d}x$ (commencez par chercher une forme canonique).
2. $\int_1^{e^\pi}\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x$.
3. $\int_{\frac{e^5}{3}}^{\frac{e^{5\sqrt{3}}}{3}}\frac{1}{x(25+\ln^2(3x))}\,\mathrm{d}x$ (la présence de $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ fait penser à ...).

Correction :
Méthode :
Détails :

1. On commence par mettre le dénominateur sous forme canonique. On a

$$-x^2+4x+5=-(x^2-4x-5)=-((x-2)^2-4-5)=9-(x-2)^2.$$

Notons I l'intégrale recherchée, on a alors

$$I=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2}\frac{1}{\sqrt{9-(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2}\frac{1}{3\sqrt{1-(\frac{x-2}{3})^2}}\,\mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable affine $u=\frac{x-2}{3}$, on trouve :

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u=[\operatorname{Arcsin}u]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$$

2. Effectuons le changement de variable $u=\ln x$, dont la réciproque s'écrit $x=e^u$. On a alors

$$\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\iff\mathrm{d}x=e^u\,\mathrm{d}u.$$

On effectue le changement de variable, sans oublier de modifier les bornes :

$$\int_1^{e^\pi}\sin(\ln(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sin u\times e^u\,\mathrm{d}u.$$

On cherche une primitive de $\sin u \times e^u$: pour un produit "trigo-expo", on peut par exemple passer en complexe :

$$\sin u \times e^u = \mathrm{Im}(e^{iu})e^u = \mathrm{Im}(e^{iu}e^u) = \mathrm{Im}(e^{iu+u}) = \mathrm{Im}(e^{u(1+i)}).$$

Or

$$\begin{aligned}\int^x e^{u(1+i))}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{1+i}e^{x(1+i)} = \frac{1-i}{2}e^{ix}e^i \\ &= \frac{e^x}{2}(1-i)(\cos x + i\sin x) = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x + i(-\cos x + \sin x)),\end{aligned}$$

puis

$$\int^x \sin u \times e^u\,\mathrm{d}u = \int^x \mathrm{Im}(e^{iu}) \times e^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{Im}(\int^x e^{iu} \times e^u\,\mathrm{d}u) = (\cos x + \sin x)e^x.$$

On peut conclure :

$$\int_0^\pi \sin u \times e^u\,\mathrm{d}u = [(\cos u + \sin u)e^u]_0^\pi = e^\pi - 1$$

3. Effectuons le changement de variable $u = \ln(3x)$. On a $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. On effectue le changement de variable, sans oublier de modifier les bornes :

$$\int_{\frac{e^5}{3}}^{\frac{e^{5\sqrt{3}}}{3}} \frac{1}{x\left(25+\ln^2(3x)\right)}\,\mathrm{d}x = \int_5^{5\sqrt{3}} \frac{1}{25+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

On rappelle (ou on redémontre en posant $u = at$) la formule

$$\int^y \frac{1}{u^2+a^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}(\frac{y}{a}),$$

qui donne avec $a = 5$:

$$\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{1}{25+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{5}[\mathrm{Arctan}\,\frac{u}{5}]_5^{5\sqrt{3}} = \frac{1}{5}(\mathrm{Arctan}\,\sqrt{3} - \mathrm{Arctan}\,1) = \frac{1}{5}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{60}.$$

Exercice 4 ●●○ **Sommes de Riemann** Calculer les limites des quantités suivantes lorsque $n \to +\infty$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{n}$. **2.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$. **3.** $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ (***, appliquer une fonction bien choisie).

Correction :

Méthode :

1. On reconnait la somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})$ avec $f(t) = \sin(\pi t)$.
2. Utiliser des factorisations "forcées" par n ou n^2 pour faire apparaître une somme de Riemann.
3. Notons (p_n) la suite à étudier. Un quotient et des factorielles dans un exercice de sommes de Riemann ? Appliquons la fonction ln à la suite.

Détails :

1.
2.
3. Notons (p_n) la suite à étudier. Un quotient et des factorielles dans un exercice de sommes de Riemann ? Appliquons la fonction ln à la suite :

$$\ln(p_n) = \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(\ln(2n!) - \ln(n^n) - \ln(n!)).$$

Comment faire apparaître une somme ? On a

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k$$

et donc

$$\ln((2n)!) - \ln(n!) = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k).$$

En utilisant aussi $\ln(n^n) = n\ln n$, on obtient

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n}(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n\ln n).$$

Pour faire rentrer $n\ln$ dans la somme, on note que cette somme comporte n termes, et donc

$$n\ln n = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln n,$$

donc

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}(\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\frac{k}{n}.$$

On pourrait faire apparaître deux somme de Riemann (de 1 à n et de 1 à $2n$) mais il est plus direct d'utiliser le glissement d'indice $k = n + p$:

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^n \ln\frac{n+p}{n} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^n \ln(1+\frac{p}{n}).$$

On pose $f(x) = \ln(1+x)$, et on reconnait une somme de Riemann associée à f sur l'intervalle $[0,1]$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(p_n) = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u = [u\ln u - u]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1.$$

Puisque $p_n = \exp(\ln(p_n))$ par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

Exercice 5 ●●○ **Formule de la moyenne** Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ et $g \in \mathscr{C}^0([a,b])$, avec g de signe constant.

1. Montrer le résultat suivant :

$$\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Idée : Chercher à montrer que la fonction $t \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(t)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ s'annule.

2. Etudier la limite de $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to 0^+$.
3. Etudier la limite de $n^2 \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1+e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.

Correction :
Méthode :

1. Commencer par écrire

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(t)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - f(t))g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer ensuite cette quantité change de signe en "optimisant" $f(t)$ avec le théorème des bornes atteintes.

2. On peut appliquer le résultat précédent, ou le faire à la main. L'idée est que lorsque $x \to 0$, le facteur e^{-t} est proche de 1, et donc l'intégrale devrait se comporter comme $\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, qui se calcule. Pour le montrer, on utilise des inégalités pour contrôler e^{-t} sur l'intervalle $[x, 2x]$.
3. On procède comme à la question précédnte, mais cette fois-ci c'est $\frac{1}{t}$ que l'on encadre.

Détails :

1. Introduisons la fonction

$$D : t \mapsto \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(t)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

qui est définie et continue sur $[a,b]$. On doit montrer que D s'annule au moins une fois. Par linéarité, on a directement

$$\forall t \in [a,b], \quad D(t) = \int_a^b (f(x) - f(t))g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On va chercher à montrer que cette quantité change de signe en choisissant t tel que la fonction sous l'intégrale soit de signe constant.
Comme la fonction f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (t_1, t_2) \in [a,b]^2, \quad \forall t \in [a,b], \quad f(t_1) \leqslant f(t) \leqslant f(t_2).$$

Puisque $g \geqslant 0$, on déduit :

$$\forall x \in [a,b], \quad (f(x) - f(t_1))g(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (f(x) - f(t_2))g(x) \leqslant 0.$$

D'où en intégrant :

$$D(t_1) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad D(t_2) \leqslant 0.$$

Puisque D est continue, on peut appliquer le TVI : il existe $c \in [a,b]$ tel que $D(c) = 0$, ce qui donne l'égalité voulue.

2. On peut appliquer le résultat précédent, ou le faire "à la main". Optons pour ce deuxième choix (les idées étant très proches).
On a par décroissance de $t \mapsto e^{-t}$:

$$\forall t \in [x, 2x], \quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x},$$

et donc pisque $\frac{1}{t} > 0$ sur l'intervalle $[x, 2x]$:

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{e^{-2x}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-x}}{t},$$

et donc en intégrant :

$$e^{-2x}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant e^{-x}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or on a

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2.$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, \quad \ln 2 \times e^{-2x} \leqslant \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \ln 2 \times e^{-x}.$$

Puisque

$$\lim_{x\to 0} e^{-2x} = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1,$$

on a d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2.$$

3. On a

$$\forall t \in [n^2, n^2+1], \quad \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

ce qui donne

$$\frac{n^2}{n^2+1}\int_{n^2}^{n^2+1} 1+e^{-2t}\,\mathrm{d}t \leqslant n^2 \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1+e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n^2}^{n^2+1} 1+e^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

On conclut comme ci-dessus en calculant les intégrales et avec le théorème d'encadrement. Au final,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1+e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 6 ●●○ Lemme de Riemann : un résultat important en série de Fourier Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Montrer à l'aide d'une IPP que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Instant culture : Ce résultat reste vrai pour une fonction continue (et même continue « par morceaux »), mais la preuve est moins directe. On vient en fait de montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction tendent vers 0.

Correction :

Méthode :

Comme suggéré, on fait une IPP. Puisque la fonction f est supposé $\mathscr{C}^1$, on est invité à la dériver.

Détails :

Une IPP directe donne :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_a^b \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}t = [-\frac{1}{n}\cos(nt)f(t)]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est bien sûr l'apparaition du facteur $\frac{1}{n}$ qui fait tendre ces quantités vers 0. En effet, on a

$$|\frac{1}{n}\cos(na)f(a)| \leqslant \frac{|f(a)|}{n} \quad \text{et} \quad |\frac{1}{n}\cos(nb)f(b)| \leqslant \frac{|f(b)|}{n}$$

et donc par encadrement, le premier terme $[-\frac{1}{n}\cos(nt)f(t)]_a^b$ tend vers 0. Concernant l'intégrale, on doit contrôler f. Puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$, on sait que f' y est continue, et elle est donc bornée :

$$\exists M > 0, \forall t \in [a,b], \quad |f'(t)| \leqslant M,$$

et donc

$$|\frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |\cos(nt)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b M\,\mathrm{d}t = \frac{M(b-a)}{n}.$$

Et puique $\lim_{n\to+\infty} \frac{M(b-a)}{n} = 0$, on conclut par encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_a^b \cos(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Finalement, les deux termes issus de l'IPP tendent bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7 ●●○ Bornes variables Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t^2)}{\mathrm{ch}(t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. Etudier les variations de $t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t^2)}{\mathrm{ch}(t^2)}$ et montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$.

Correction :

Méthode :

1. Ecrire $f(-x)$, et faire le changement de variable $u = -t$ pour ramener les bornes entre x et $2x$.
2. Le plus clair est de faire intervenir $H(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sh}(t^2)}{\mathrm{ch}(t^2)}\,\mathrm{d}t$ que l'on sait dériver.
3. Eviter au maximum les études de signe délicate. Se concentrer sur $[0,+\infty[$ puisque la fonction est impaire. Essayer de faire apparaître la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x^2)}{\mathrm{ch}(x^2)}$ dans l'expression de f'.

4. L'idée est que la fonction $\frac{\operatorname{sh}(x^2)}{\operatorname{ch}(x^2)}$ sous l'intégrale tend vers 1, et que la largeur de l'intégrale est exactement x. Mais ceci n'est pas une preuve... On peut encadrer la fonction sous l'intégrale à coup de epsilon.

Détails :

1. On a

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\operatorname{sh}(t^2)}{\operatorname{ch}(t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour faire apparaître $f(x)$, on réalise le changement de variable $u = -t$:

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh}((-u)^2)}{\operatorname{ch}((-u)^2)}(-\,\mathrm{d}u) = -\int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh}(u^2)}{\operatorname{ch}(u^2)}\,\mathrm{d}u = -f(x)$$

ce qui prouve que f est impaire.

2. On pose $H(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh}(t^2)}{\operatorname{ch}(t^2)}\,\mathrm{d}t$ La relation de Chasles donne

$$f(x) = \int_x^0 \frac{\operatorname{sh}(t^2)}{\operatorname{ch}(t^2)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t + \int_0^{2x} \frac{\operatorname{sh}(t^2)}{\operatorname{ch}(t^2)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t = H(2x) - H(x).$$

Or, la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que primitive, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{\operatorname{ch}(x^2)},$$

d'où par dérivée d'une somme et d'une composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2\frac{\operatorname{sh}(4x^2)}{\operatorname{ch}(4x^2)} - \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{\operatorname{ch}(x^2)}.$$

3. Le signe de l'expression précédente n'est pas clair. Etudions au préalable la fonction $h : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{\operatorname{ch}(x^2)}$. En posant $\ = \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$, on montre que

$$' = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} > 0,$$

ce qui prouve que cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$. La fonction h est alors croissante sur $[0, +\infty[$ comme composée. On a alors

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sh}(4x^2)}{\operatorname{ch}(4x^2)} + \frac{\operatorname{sh}(4x^2)}{\operatorname{ch}(4x^2)} - \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{\operatorname{ch}(x^2)} = h(2x) + h(2x) - h(x).$$

Puisque h est croissante, on a

$$\forall x \geqslant 0, \quad h(2x) - h(x) \geqslant 0,$$

et donc puisque $h \geqslant 0$ sur $[0, +\infty[$:

$$\forall x \geqslant 0, \quad f'(x) \geqslant 0,$$

ce qui prouve que f est croissante.

4. Il est directe en revenant aux expresion de sh et ch que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sh}(x^2)}{\operatorname{ch}(x^2)} = 1.$$

Soit $\epsilon > 0$, en revenant à la définition de la limite on a :

$$\exists x_0 \in]0, +\infty[, \quad \forall t \geqslant x_0, \quad 1 - \epsilon \leqslant \frac{\operatorname{sh}(t^2)}{\operatorname{ch}(t^2)} \leqslant 1 + \epsilon,$$

et donc en intégrant entre x et $2x$, on a pour $x \geqslant x_0$:

$$\int_x^{2x} (1-\epsilon)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} (1+\epsilon)\,\mathrm{d}t$$
$$\iff x(1-\epsilon) \leqslant f(x) \leqslant x(1+\epsilon)$$
$$\iff 1 - \epsilon \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1 + \epsilon$$

Finalement, on a montré :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0, \quad \forall x \geqslant x_0, \quad 1 - \epsilon \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant 1 + \epsilon.$$

C'est bien la preuve que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et donc que $f(x) \underset{x \to \infty}{\sim} x$.

Pour aller plus loin : La méthode employée pour la dernière question fonctionne si on remplace $\frac{\operatorname{sh}(t^2)}{\operatorname{ch}(t^2)}$ pour n'importe quelle fonction qui tend vers 1 (ou une limite $\ell \neq 0$) en $+\infty$.

Exercice 8 ••• **Méthode des trapèzes** On suppose que $f \in \mathscr{C}^2([a, b])$. On considère une subdivision régulière $(x_j)_{j=0,\dots,n}$ de $[a, b]$, et on pose

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}.$$

On va montrer que T_n est bonne approximation de $\int_a^b f$ lorsque $n \to +\infty$.

1. (Approximation par une fonction affine).

a. Soient $\alpha < \beta$ quelconques, et g la fonction affine définie sur $[\alpha, \beta]$, qui relie les points $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$. Donnez son expression et calculez $\int_\alpha^\beta g$. Faites un dessin.

b. Montrer par une double intégration par parties que

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = (\beta - \alpha)\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. Calculer $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra poser $x=\alpha+(\beta-\alpha)u$ pour simplifier le calcul).

d. En déduire que

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}\sup_{t\in[\alpha,\beta]}|f''(t)|.$$

2. Etant donné le graphe de f, représenter les quantités $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et T_n. Justifier le nom de la méthode.

3. Montrer que

$$\left|T_n-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \quad \text{avec} \quad M_2=\sup_{t\in[a,b]}|f''(t)|.$$

Exercice 9 ●●○ — Aire d'une ellipse Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, et soit $\mathcal{E}$ le sous-enemble du plan défini par

$$\mathcal{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\}.$$

1. Représenter schématiquement l'ensemble $\mathcal{E}$. On pourra commencer par le dessiner à l'aide du changement d'échelle $(X,Y)=(\frac{x}{a},\frac{y}{b})$.

2. Calculer l'aire délimitée par $\mathcal{E}$ dans le quart de plan supérieur droit $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. On pourra exprimer y en fonction de x dans $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, ou utiliser une intégrale double et des coordonnées polaires, comme en SI.

3. En déduire l'aire totale délimitée par $\mathcal{E}$. Est-ce cohérent avec le cas $a=b=1$. Auriez-vous pu trouver le résultat « à la main » par des changement d'échelle ?

Exercice 10 ●●○ — Inégalité par une formule de Taylor Montrer que

$$\forall x\geqslant 0, \quad x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$