Feuille de calculs assistés
Calculs de primitives : les réflexes

Exercice 1 •○○ Primitiver, sans oublier le facteur On sait qu'une primitive de la fonction cos est donnée par $\boxed{}$

Mais on ne se trompera pas dans le calcul de primitive : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int^x \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \boxed{}$$

Ce genre de formule se généralise : si une fonction f a pour primitive F, alors

$$x \mapsto f(ax) \quad \text{a pour primitive } \boxed{}$$

Exercice 2 •○○ Linéariser une fonction trigo au carré : la base

On a la formule de dupplication

$$\cos(2x) = \underbrace{\boxed{}}_{\text{avec cos}} = \underbrace{\boxed{}}_{\text{avec sin}}$$

Cela peut servir à linéariser :

$$\cos^2(x) = \boxed{}$$

et donc à calculer

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \boxed{}$$

Exercice 3 •○○ Linéariser une fonction trigo

Pour linéariser $\sin^4$:

$$\sin^4(x) = \underbrace{\boxed{}}_{\text{formule d'Euler}} = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4.$$

On poursuit avec le binôme de Newton :

$$(e^{ix} - e^{-ix})^4 = \boxed{}.$$

On regroupe les exponentielles :

$$(e^{ix} - e^{-ix})^4 = \boxed{}.$$

On conclut à nouveau avec les formules d'Euler, et on trouve

$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\left(3 - 4\cos 2x + \cos 4x\right).$$

Il est de bon ton de vérifier sa formule, par exemple avec $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Cela ne prouve rien, mais c'est rassurant...

Exercice 4 •○○ Bien conduire une ipp

La primitive du produit n'est pas le produit des primitives ! A la place, on a la formule de l'IPP :

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Encore faut-il savoir quoi poser. Par exemple, pour calculer $\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t$, on pose naturellement $u(t) = \boxed{}$ et $v'(t) = \boxed{}$ ce qui donne

$$\int_0^\pi t\cos t = \boxed{}$$

Exercice 5 •○○ L'IPP masquée

Des fois, l'IPP est masquée : pour calculer une primitive de $t \mapsto \ln t$, on peut poser $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = \boxed{}$, ce qui donne

$$\int^x \ln t\,\mathrm{d}t = \boxed{}.$$

Cela marche aussi pour calculer une primitive de Arctan : puisque

$$(\mathrm{Arctan})'(x) = \boxed{}$$

on a

$$\int^x \mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Il y a encore un peu de travail derrière (voir les deux exos suivants).

Exercice 6 ●○○ Savez-vous primitiver $\frac{1}{x}$?

Il est bien connu que la dérivée de ln, définie sur $]0,+\infty[$, est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Mais la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\boxed{\qquad\qquad}$ (Indice : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est aussi définie sur $]-\infty,0[$).

Ansi, si u est une fonction dérivable ne s'annulant pas, alors

$$\frac{u'}{u} \text{ a pour primitive } \boxed{\qquad\qquad}$$

Exercice 7 ●○○ Primitive d'une fraction rationnelle (I)

Il est rare de pouvoir primitiver une fraction explicitement : un des seuls cas est lorsqu'on reconnait un forme explicite. Par exemple, pour calculer $\int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, on fait apparaître la dérivée du dénominateur et on applique l'exercice précédent :

$$\int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \boxed{\qquad\qquad}$$

Exercice 8 ●○○ Primitive d'une fraction rationnelle (II)

L'exemple précédent change radicalement si on n'est plus de la forme $\frac{u'}{u}$. Si le dénominateur est un trinôme, on regarde s'il a des racines réelles. Si c'est le cas, on factorise le trinôme, puis on décompose en éléments simples. Par exemple on a

$$\frac{1}{1-x^2} = \underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{\text{je factorise le dénominateur}} = \underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{\text{je décompose en éléments simples}}.$$

Normalement on conclut avec l'exercice 6 :

$$\int^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \boxed{\qquad\qquad}$$

Exercice 9 ●○○ Primitive d'une fraction rationnelle (III)

Et pour une fraction rationnelle dont le dénominateur est un trinôme qui n'a pas de racines (on dit *irreductible*) ? On se dirige vers la fonction Arctan avec la forme canonique et des changements de variable affine. Par exemple, pour trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$, on écrit

$$x^2+x+1 = \underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{\text{je mets sous forme canonique}}$$

et donc

$$\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\boxed{\qquad\qquad}}_{\text{je pose } u=t+\frac{1}{2}}.$$

Vous n'avez pas oublié les bornes, et vous avez

$$\int^x \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \int^{x+\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t$$

On conclut en posant $v = \boxed{\qquad}$, de sorte que $u^2 = \frac{3}{4}v^2$.

Cette dernière étape permet d'avoir en toute généralité :

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Remarque : on peut accélérer le calcul en posant d'un coup $v = \sqrt{\frac{4}{3}}(t+\frac{1}{2})$.

Exercice 10 ●○○ Primitive d'une fraction rationnelle (IV)

Et pour une fraction rationnelle avec un numérateur qui vous embête ? Si son degré est plus grand qu le dénominateur, une division euclidienne permet de dégager la partie entière. On peut aussi couper le numérateur avec des techniques de "balayeur" pour aller plus vite et faire apparaître (si possible) la dérivée du dénominateur.

Par exemple, pour calculer $\int^x \frac{t^2+t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$, on peut écrire

$$\frac{t^2+t}{t^2+1} = \frac{t^2+1-1+\frac{1}{2}2t}{t^2+1} = \underbrace{\boxed{\qquad\qquad\qquad}}_{\text{on sépare en 3 morceaux que l'on sait primitiver}}.$$