Feuille d'exercices 7
Fonctions usuelles

Exercice 1 ●○○ Maîtriser les puissances

Résoudre les (in)équations suivantes (on prendra bien soin au domaine de validité des quantités en jeu) :

1. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ **2.** $x^{\sqrt{2}/x} = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$. **3.** $e^{\ln|x|} \geqslant e^{|\ln x|}$ **4.** $x^{\ln x} \leqslant x$. **5.** $3^x < 9^x - 1$.

Correction : :

Méthode :

1. Passer sous forme expo
2. Passer sous forme expo
3. On peut rapidement enlever les expos en appliquant le logarithme. Attention à bien gérer les valeurs absolues.
4. Encore une fois passer sous forme expo..
5. Poser $X = 3^x$ (qui est strictement positif) et se ramener à étudier $X^2 - X - 1$ sur $]0, +\infty[$.

Détails :

1. Corrigé en TD
2. Les quantités en jeu sont bien définies lorsque $x > 0$. L'équation se réecrit alors, d'après la définition d'une puissance :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\sqrt{2}}{x}\ln x} = e^{\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})} &\iff \frac{\sqrt{2}}{x}\ln x = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) \\
&\iff \frac{\sqrt{2}}{x}\ln x = \frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x \\
&\iff \ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} \\
&\iff \ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad 2^{3/2} = x^{3/2} \\
&\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2
\end{aligned}$$

3. Corrigé en TD.
4. Les quantités en jeu sont bien définies lorsque $x > 0$. On peut démarrer l'exercice avec la forme exponentielle, on peut aussi tout diviser par x qui est strictement positif pour simplifier l'inéquation :

$$\begin{aligned}
x^{\ln x} \leqslant x &\iff x^{\ln x - 1} \leqslant 1 \\
&\iff e^{\ln(x)\times(\ln x - 1)} \leqslant 1 \\
&\iff \ln(x) \times (\ln x - 1) \leqslant 0
\end{aligned}$$

On peut poser $X = \ln x$ et étudier le signe de $X(X-1)$. Ce trinôme est négatif si et seulement $0 \leqslant X \leqslant 1$, et donc

$$\ln(x) \times (\ln x - 1) \leqslant 0 \iff 0 \leqslant \ln x \leqslant 1 \iff 1 \leqslant x \leqslant e.$$

Notez qu'on aurait pu, et cela revient au même, faire une disjonction de cas selon les signes de $\ln(x)$ (ce qui dépend de la position de x par rapport à 1) et $\ln(x) - 1$ (ce qui dépend de la position de x par rapport à e).

En conclusion :

$$x^{\ln x} \leqslant x \iff x \in [1, e].$$

5. Faite en TD.

Exercice 2 ●●○

1. Donner le domaine de définition $A \subset \mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 10(x-1)^{x-1}(3-x)^{3-x}$.
2. Montrer que le graphe de la fonction possède des symétries que l'on précisera.
3. Démontrer que pour tout $x \in A$, on a $10 \leqslant f(x)$.

Correction : :

Méthode :

Détails :

1. Corrigé en TD.
2. Corrigé en TD.
3. On a, pour $x \in A$:

$$\begin{aligned}
10 \leqslant f(x) &\iff 10 \leqslant 10e^{(x-1)\ln(x-1)+(3-x)\ln(3-x)} \\
&\iff 0 \leqslant (x-1)\ln(x-1) + (3-x)\ln(3-x).
\end{aligned}$$

Il reste à étudier la fonction $g : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = (x-1)\ln(x-1) + (3-x)\ln(3-x)$$

afin de montrer qu'elle est bien positive. On calcule sa dérivée. Rappelons que pour une fonction u, la fonction $\ln(u)$ a pour dérivée $\frac{u'}{u}$. Donc en dérivant les produits :

$$g'(x) = 1 + \ln(x-1) - 1 - \ln(3-x) = \ln(\frac{x-1}{3-x}).$$

Il reste à trouver le signe. On a, en notant que $3 - x > 0$ pour $x \in A$:

$$\ln(\frac{x-1}{3-x}) \leqslant 0 \iff \frac{x-1}{3-x} \leqslant 1 \iff x-1 \leqslant 3-x \iff x \leqslant 2,$$

et de même,

$$\ln(\frac{x-1}{3-x}) \geqslant 0 \iff x \geqslant 2.$$

On dresse le tableau de variation de g :

x	1		2		3
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$
$g(x)$	$2\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2\ln 2$

Notons, même si cela n'est pas utile pour l'exercice, qu'au bord de A, c'est-à-dire en 1 et en 3, g' n'est pas définie, mais g admet une limite, qui vaut $2\ln 2$.

Ainsi, g a un unique point critique en 2, et c'est un minimum par lecture du tableau de variation. Or $g(2) = 0$, et donc

$$\forall x \in A, \quad g(x) \geqslant 0,$$

ce qui équivaut bien à $10 \leqslant f(x)$ d'après ce qui précède.

Exercice 3 ●●○ — Des puissances d'entiers

Pour quelles valeurs $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ a-t-on $n^p = p^n$? On pourra chercher à faire intervenir la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Correction : :

Méthode :

Il s'agit a priori d'un problème d'arithmétique (c'est-à-dire : avec des nombres entiers). Vue l'indication, il parait logique de prendre le ln de l'équation. En parallèle (et cela pourra servir), il est naturel de tester quelques valeurs, et de remarquer que $2^4 = 4^2$, le tout étant de savoir s'il y a d'autres solutions.

Détails :

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution. Prenons le logarithme de l'équation : on aurait

$$n^p = p^n \iff p\ln n = n \ln p \iff \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln p}{p}.$$

Ainsi, on cherche si la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ peut prendre plusieurs fois la même valeur sur des entiers.

Cette fonction est bien définie sur $]0,+\infty[$. On l'étudie rapidement, on a

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

On peut dresser le tableau de variations de f, en utilisant que $\ln x < 1 \iff x < e$, et avec un calcul rapide de limites.

x	0	1	e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Or on sait que $2 < e < 3$ (on a $e \approx 2,7$). Ainsi, par lecture du tableau on voit que seule la valeur $n = 2$ peut convenir, et on cherche $p \in \mathbb{N}^*$ solution de

$$f(2) = f(p), \quad p \geqslant 3.$$

Il est naturel de calculer $f(4)$ (les plus affûté(e)s auront au préalable noté que $2^4 = 4^2$), et en effet on a

$$f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2).$$

Ainsi, il existe une unique solution au problème : $(2,4)$, correspondant à l'égalité $2^4 = 4^2$.

Exercice 4 ●●○ — La tangente hyperbolique

Soit la fonction $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$. Etudier cette fonction.

Correction : :

Méthode :

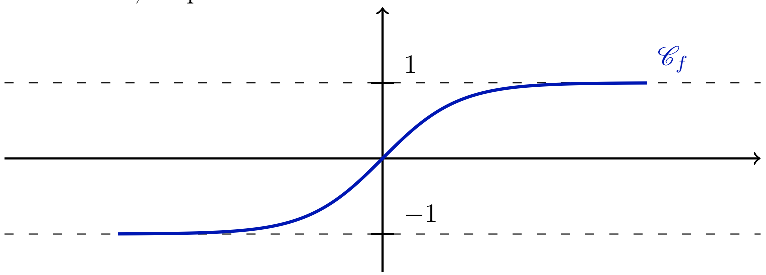
On déroule l'arsenal.

Détails :

Déjà, puisque
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1,$$
la fonction th est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme quotient de telles fonctions, avec le dénominateur qui ne s'annule pas. On a de plus
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x),$$
et la fonction th est donc impaire.

On a de plus
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}^2(x)},$$
car $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$. Or d'après le cours, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1,$$
et donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0.$$
Cela prouve que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Pour chercher la limite lorsque $x \to +\infty$, on écrit :
$$\operatorname{th}(x) = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$
Notez la technique de mise en facteur du terme le plus grand lorsque $x \to +\infty$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, on déduit par quotient de limites :
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \frac{1}{1} = 1.$$
Puisque la fonction est impaire, on a aussi
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1.$$
Notons que $\operatorname{th}(0) = 0$ et $\operatorname{th}'(0) = 1$, et donc la droite $y = x$ est tangente à la courbe en l'origine.

Finalement, on peut tracer la fonction



Exercice 5 •○○

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes (on pourra poser $X = e^x$) :

1. $\operatorname{ch} x = \sqrt{5}$. **2.** $\operatorname{sh} x = \sqrt{35}$. **3.** $\operatorname{ch} x < \sqrt{26}$.

Correction : :

Méthode :

Tracer les fonctions pour intuiter ka nature des solutions. Ensuite, puisque les équations font intervenir e^x et e^{-x}, il est naturel de poser $X = e^x$, de sorte que $e^{-x} = \frac{1}{X}$. Cette méthode est à savoir pour ce genre d'équation.

Détails :

1. Déjà, puisque $\sqrt{5} > 1$, le graphe de $x \mapsto \operatorname{ch} x$ indique que l'équation a deux solutions symétriques. Calculons-les. On a
$$\operatorname{ch} x = \sqrt{5} \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sqrt{5} \iff e^x + e^{-x} - 2\sqrt{5} = 0$$
$$\iff e^{2x} - 2\sqrt{5}e^x + 1 = 0 \text{ en multipliant par } e^x.$$
Notez la dernière étape, multiplier par e^x, qui est classique et naturelle.
On pose $X = e^x$, de sorte que $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$. Notez que ce changement d'inconnue correspond à la bijection $x \mapsto e^x$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et donc la nouvelle inconnue X est à trouver dans $]0, +\infty[$ (une exponentielle est toujours positive).
Alors, l'équation devient :
$$X^2 - 2\sqrt{5}X + 1 = 0, \quad \text{d'inconnue } X > 0.$$
Cette équation possède deux solutions :
$$X_- = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{16}}{2} = \sqrt{5} - 2 \quad \text{et} \quad X_+ = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{16}}{2} = \sqrt{5} + 2.$$
On revient aux solutions de l'équation initiale en utilisant, pour $X > 0$, que $X = e^x \iff x = \ln X$. On obtient deux solutions :
$$x_- = \ln(\sqrt{5} - 2) \quad \text{et} \quad x_+ = \ln(\sqrt{5} + 2).$$
On peut vérifier que les solutions sont opposées, ce qui ne semble pas évident. On a
$$-x_- = -\ln(\sqrt{5} - 2) = \ln(\frac{1}{\sqrt{5} - 2}) = \ln(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5}^2 - 2^2}) = x_+.$$

2. Déjà, le graphe de $x \mapsto \operatorname{sh} x$ indique que l'équation a une unique solution, qui est positive. On suit la même méthode que ci-dessus, et on aboutit à l'équation

$$X^2 - 2\sqrt{35}X - 1 = 0, \quad \text{d'inconnue} \quad X > 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 4 \times 35 + 4 = 36 \times 4 = 12^2$. Elle possède deux solutions réelles :

$$X_- = \sqrt{35} - 6 \quad \text{et} \quad X_+ = \sqrt{35} + 6.$$

Or, on a $X_- < 0$, on écarte donc cette valeur car on cherche de solutions positives (comme ci-dessus : une exponentielle est toujours positive). Ainsi, on a une unique solution au problème : X_+, et en utilisant $X = e^x \iff x = \ln X$, on déduit

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{35} \iff x = \ln(\sqrt{35} + 6).$$

Pour aller plus loin : Une application directe du théorème de la bijection nous dit que $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est bijective, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation $y = \operatorname{sh} x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On peut la calculer avec la méthode précédente, et on trouve

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$ a pour bijection réciproque

$$y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Cette fonction est des fois appelée argsh.

On ne peut pas faire exactement la même chose pour la fonction ch car il est clair qu'elle n'est pas bijective (elle est paire !). Mais si on la restreint à $[0, +\infty[$, on peut reprendre les calculs ci-dessus et ainsi définir la fonction argch sur $[1, +\infty[$.

3. Déjà, puisque $\sqrt{26} > 1$, le graphe de $x \mapsto \operatorname{ch} x$ indique que l'équation a pour solution un intervalle symétrique, dont les bords sont les solutions de l'équation $\operatorname{ch} x = \sqrt{26}$. Montrons cela.

Avec les techniques ci-dessus, on a, en posant $X = e^x$:

$$\operatorname{ch} x < \sqrt{26} \iff X^2 - 2\sqrt{26}X + 1 < 0.$$

Or, la parabole $X \mapsto X^2 - 2\sqrt{26}X + 1$ est positive, sauf entre ses racines $\sqrt{26} \pm 5$ (qui sont bien toutes les deux positives). Ainsi,

$$\operatorname{ch} x < \sqrt{26} \iff \sqrt{26} - 5 < e^x < \sqrt{26} + 5,$$

et donc puisque la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante :

$$\operatorname{ch} x < \sqrt{26} \iff \ln(\sqrt{26} - 5) < x < \ln(\sqrt{26} + 5).$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $I =]\ln(\sqrt{26} - 5), \ln(\sqrt{26} + 5)[$.

Exercice 6 ●○○ — Formules hyperboliques (non exigibles)

Montrer les formules suivantes (on pourra ne pas s'attaquer à toutes, et s'assurer qu'on a compris le mécanisme) :

1. (Addition et duplication) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
   - **(ii)** $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ et $\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$
   - **(iv)** $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
2. (Conversion produit-somme) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y))$.
   - **(ii)** $\operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y))$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y))$.
3. (Conversion somme-produit) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a :
   - **(i)** $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 2 \operatorname{ch}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{ch}(\frac{x-y}{2})$.
   - **(ii)** $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}(y) = 2 \operatorname{sh}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{sh}(\frac{x-y}{2})$.
   - **(iii)** $\operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 2 \operatorname{sh}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{ch}(\frac{x-y}{2})$.
   - **(iv)** $\operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(y) = 2 \operatorname{ch}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{sh}(\frac{x-y}{2})$.

Ces formules ne sont pas à apprendre par coeur.

Exercice 7 ●○○ — Linéarisation hyperbolique

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(4x) = 8 \operatorname{ch}^4 x - 8 \operatorname{ch}^2 x + 1$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16} \operatorname{sh}(5x) - \frac{5}{16} \operatorname{sh}(3x) + \frac{10}{16} \operatorname{sh} x$.

3. Donner une primitive de $x \mapsto \operatorname{sh}^5 x$.

Exercice 8 ●●○ — Souvenez-vous pour les sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$, ainsi que a et b deux réels. Calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + kb) \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a + kb).$$

Exercice 9 ●●● — Paramétrage et déphasage hyperbolique

On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que le système
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$$
d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ ait une solution, puis le résoudre.
2. On suppose que (a,b) vérifie $a > 0$ et $a^2 > b^2$. Montrer que :
$$\exists \varphi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(x + \varphi).$$
3. On suppose que $a < 0$ et $a^2 > b^2$. En déduire que :
$$\exists \varphi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = -\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(x + \varphi).$$
4. Etablir des résultats similaires pour $x \mapsto a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x$ lorsque $b^2 > a^2$ (on permutera intelligement les rôles des paramètres).

Exercice 10 ●○○ **Revenir aux définition** Simplifier les quantités suivantes :

1. $\operatorname{Arccos}(\cos \frac{7\pi}{6})$. **2.** $\operatorname{Arccos}(-\sin \frac{\pi}{6})$. **3.** $\operatorname{Arcsin}(\cos \frac{11\pi}{4})$.
4. $\sin(\operatorname{Arccos} x)$ avec $x \in [-1,1]$. **5.** $\operatorname{Arcsin}(\cos x)$ avec $x \in [\pi, 2\pi]$.

Correction : :
Méthode :
Exercice simple qui a pour but de se familiariser avec Arccos et Arcsin. On rappelle que pour $x \in [-1,1]$, le nombre $y = \operatorname{Arccos} x$ est la solution de
$$\begin{cases} \cos y = x \\ y \in [0, \pi] \end{cases}.$$
Autrement dit, pour trouver $\operatorname{Arccos} x$, on cherche le nombre dans $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.
De même, le nombre $y = \operatorname{Arcsin} x$ est la solution de
$$\begin{cases} \sin y = x \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$
Pour **1**–**3**, ne pas se compliquer la vie, et calculer les quantités dans les parenthèses. Pour la **4**, on peut relier sin et cos avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Pour la **5**, ce serait plus commode d'avoir $\operatorname{Arccos} \cos x$ (et encore, ce n'est pas direct car “le Arccos ne tue pas toujours le cos”), quelle formule relie Arcsin et Arccos ?
Détails :

1. On a $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc
$$\operatorname{Arccos}(\cos \frac{7\pi}{6}) = \operatorname{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6},$$
car Arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$.

2. On a $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et donc
$$\operatorname{Arccos}(-\sin \frac{\pi}{6}) = \operatorname{Arccos}(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3},$$
car Arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$.

3. On a $\cos \frac{11\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, et donc
$$\operatorname{Arcsin}(\frac{11\pi}{4}) = \operatorname{Arcsin}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4},$$
car Arcsin est à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

4. On utilise l'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$. On déduit :
$$\forall x \in [-1,1], \quad (\sin \operatorname{Arccos} x)^2 = 1 - (\cos \operatorname{Arccos} x)^2 = 1 - x^2 \quad \text{car} \quad \cos \operatorname{Arccos} x = x.$$
Ainsi,
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin \operatorname{Arccos} x = \pm\sqrt{1-x^2}.$$
Il faut déterminer si c'est + ou −. Discutons le signe. On sait que $\operatorname{Arccos} x \in [0,\pi]$, or la fonction sin est positive sur $[0,\pi]$. D'où pour $x \in [-1,1]$: $\sin \operatorname{Arccos} x \geqslant 0$, et donc
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin \operatorname{Arccos} x = \sqrt{1-x^2}.$$

5. On commence par utiliser la formule
$$\forall x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2},$$
et donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(\cos x).$$
On sait que $y = \operatorname{Arccos}(\cos x)$ n'est pas toujours égal à x : cela est vrai seulement lorsque $x \in [0,\pi]$. Or ici $x \in [\pi, 2\pi]$, le nombre y est donc solution de
$$\begin{cases} \cos y = \cos x \\ y \in [0,\pi] \end{cases}.$$
Un cercle trigo nous amène à poser $y = 2\pi - x$, et en effet :
$$\pi \leqslant x \leqslant 2\pi \iff 0 \leqslant 2\pi - x \leqslant \pi, \quad \text{et} \quad \cos(2\pi - x) = \cos x.$$

Cela pouve que
$$\forall x \in [\pi, 2\pi], \quad \text{Arccos}(\cos x) = 2\pi - x$$
et donc
$$\forall x \in [\pi, 2\pi], \quad \text{Arccos}(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (2\pi - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$
A retenir/pour aller plus loin : On peut calculer $\text{Arccos}(\cos x)$ de manière générale en fonction de l'entier k tel que $k\pi \leqslant x < (k+1)\pi$ (c'est-à-dire $k = E(\frac{x}{\pi})$). Visuellement, cela correspond au nombre de demi-tour du cerle trigo à faire pour arriver à x. On veut se ramener à $[0, \pi[$. Cela dépend de si k est pair ($k = 2p$) ou impaire ($k = 2p - 1$). Dans le premier cas, on considère $x - 2p\pi$ qui appartient à $[0, \pi[$, et on a
$$\cos(x - 2p\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad \text{Arccos}\cos x = \text{Arccos}\cos(x - 2p\pi) = x - 2p\pi.$$
Dans le deuxième cas, si on décale de $2p\pi$, on obtient cette fois $-\pi \leqslant x - 2p\pi < 0$. On regarde alors le symétrique $2p\pi - x$ qui appartient à $]0, \pi]$, et on a
$$\cos(2p\pi - x) = \cos x \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad \text{Arccos}\cos x = \text{Arccos}\cos(2p\pi - x) = 2p\pi - x.$$
Toutes ces considérations s'accompagnent d'un cercle trigo ! On peut déterminer de même $\text{Arcsin}\sin x$.

Exercice 11 ●●○ — Etudier une fonctions Etudier la fonction $f(x) = \text{Arcsin}\,\frac{1+x}{1-x}$: domaine de définition, et de dérivabilité, variations, représentation graphique, et plus si affinités.

Exercice 12 ●○○ — En étudiant les fonctions Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\text{Arctan}(x) \geqslant \frac{x}{1+x^2}$.

Correction : :

Méthode :

Que peuvent avoir en commun les deux fonctions ? En l'absence de piste, on étudie la différence avec l'arsenal du lycée. Les dérivées vont bien ensemble...

Détails :

Posons $f(x) = \text{Arctan}\, x - \frac{x}{1+x^2}$, et étudions cette fonction sur $[0, +\infty[$. Elle est bien dérivable, et on a
$$\forall x \geqslant 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x^2) - 2x^2}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0.$$
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$, or on a $f(0) = 0$. Ainsi, cela donne
$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \geqslant f(0) = 0,$$
et donc l'inégalité voulue.

Exercice 13 ●●● — Raisonnements et formules

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$\text{Arctan}\,\frac{n}{n+1} + \text{Arctan}\,\frac{n+1}{n+2} = \text{Arctan}\,\alpha,$$
puis exprimer α en fonction de n. Appliquer avec $n = 3$.

Exercice 14 ●●○ — Formules et raisonnements

Résoudre par analyse-synthèse les équations suivantes :

1. $\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}(x^2 + x - 1) = \frac{\pi}{2}$. **2.** $\text{Arcsin}\, x = \text{Arcsin}\,\frac{4}{5} + \text{Arcsin}\,\frac{5}{13}$.

Correction : :

Méthode :

Détails :

1. Corrigé en cours.
2. Soit x une solution, alors, en posant $\alpha = \text{Arcsin}\,\frac{4}{5} + \text{Arcsin}\,\frac{5}{13}$ pour raccourcir les notations :
$$\begin{aligned} \text{Arcsin}\, x = \alpha &\implies \sin(\text{Arcsin}\, x) = \sin \alpha. \\ &\iff x = \frac{4}{5}\cos(\text{Arcsin}\,\frac{4}{5}) + \frac{5}{13}\cos(\text{Arcsin}\,\frac{5}{13}), \end{aligned}$$
où on a utilisé la formule pour développer $\sin(a+b)$.
Attention, A ce stade on n'a pas trouvé x car ce n'est qu'une implication ! On a montré que
$$x \text{ est solution} \implies x = \frac{4}{5}\cos(\text{Arcsin}\,\frac{5}{13}) + \frac{5}{13}\cos(\text{Arcsin}\,\frac{4}{5}).$$
Il va falloir terminer le calcul, et démontrer que la valeur trouvée est bien solution.
Pour $y \in [0, 1]$, on va calculer $\cos(\text{Arcsin}(y))$. On sait que
$$\cos^2(\text{Arcsin}(y)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(y)) = 1 - y^2.$$
et donc
$$\cos(\text{Arcsin}(y)) = \pm\sqrt{1 - y^2}$$
Or si $y \in [0, 1]$, On a $\text{Arcsin}\, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\cos \text{Arcsin}\, y \in [0, 1]$. On déduit donc que
$$\forall y \in [0, 1], \quad \cos(\text{Arcsin}(y)) = \sqrt{1 - y^2}.$$

Revenons à l'exercice, on a alors

$$\frac{4}{5}\cos(\operatorname{Arcsin}\frac{5}{13})+\frac{5}{13}\cos(\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}}+\frac{5}{13}\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}$$

Et donc après calculs :

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}\cos(\operatorname{Arcsin}\frac{5}{13})+\frac{5}{13}\cos(\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}) = \frac{63}{65}.$$

Résumons ce que nous avons obtenu : on a montré que

$$\operatorname{Arcsin} x = \alpha \implies x = \sin\alpha = \frac{63}{65}.$$

On doit vérifier si la réciproque est vraie, c'est-à-dire que $x = \frac{63}{65}$ est solution. On a

$$x = \sin\alpha \implies \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}(\sin\alpha).$$

On voit alors le problème : on doit vérifier que $\operatorname{Arcsin}(\sin(\alpha)) = \alpha$. On sait que cela est vrai si et seulement $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Déjà, il est clair que $\alpha > 0$. Ensuite, on revient à la définition de α, et on cherche à majorer $\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}$ et $\operatorname{Arcsin}\frac{5}{13}$ par des valeurs connues. On a bien

$$\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$$

et donc par stricte croissance de Arcsin :

$$\operatorname{Arcsin}\frac{5}{13} < \operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Cela donne l'idée de comparer $\frac{4}{5}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On a

$$\frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \frac{16}{25} < \frac{3}{4} \iff \frac{64}{75} < 1,$$

cequi est bien vrai. Donc

$$\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} < \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

En ajoutant les deux inégalités, on obtient

$$\alpha < \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et donc $\operatorname{Arcsin}(\sin(\alpha)) = \alpha$. Finalement :

$$x = \sin\alpha = \frac{63}{65} \implies \operatorname{Arcsin} x = \alpha,$$

ce qui montre que l'équation a pour unique solution $\frac{63}{65}$.

Remarque : Cette correction vous parait longue et pénible alors qu'on avait bien la solution ?
Essayez de résoudre pour voir (c'est très rapide) :

$$\operatorname{Arcsin} x = 10\pi, \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 15 ●●○ Si on peut éviter de dériver...

Soit la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} x^3$.

1. Donner son domaine de définition, et ses variations. Montrer que c'est une bijection (on précisera avec soin le domaine d'arrivée).
2. Dériver la fonction.
3. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$, puis résoudre cette équation.

Correction :
Méthode :
Détails :

1. Tout comme la fonction Arctan, f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction Arctan est strictement croissante, et $x \mapsto x^3$ aussi. La fonction f est donc strictement croissante comme somme et composée de fonctions croissantes. On a

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{Arctan} x = \pm\frac{\pi}{2},$$

et donc par composée puis somme de limite on a

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi.$$

Comme f est continue comme somme et composée de fonctions continues, et qu'elle est strictement monotone, d'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi, \pi[$.

2. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}+\frac{3x^2}{1+x^6}$$

3. La fonction f étant bijective, cette équation a une seule solution. On a de plus, si x est solution, que

$$\tan(\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(x^3)) = \tan(\frac{3\pi}{4}).$$

Attention, ce n'est qu'une implication, et un seul des x vérifiant cette équation est solution.

En utilisant la formule d'addition de la tangente, qui est bien licite car $x = \pm 1$ ne sont pas solutions, l'équation précédente devient :

$$\frac{x+x^3}{1-x^4} = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \iff \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = -1 \iff x = -(1-x^2) \iff x^2-x-1=0$$

Après calcul du discriminant, on trouve

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Une et une seule de ces deux valeurs est solutions. Puisque f est croissante, et que $f(0)=0$, il est clair que $x>0$. Le candidat négatif ne peut donc pas être solution, et

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 16 ••• Formules de type Euler, Machin et autres

On démontre des formules qui relient le nombre π à l'arctangente de fractions. Celles-ci ont été utiles pour approcher π, car on a des méthodes pour approcher l'arctangente d'un nombre (surtout s'il est petit).

1. Montrer que

- **a.** $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.
- **b.** $2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.
- **c.** $2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

2. Il est possible de retrouver ces formules en introduisant les nombres complexes qui vont bien. Par exemple, soient $z_1 = 3+i$ et $z_2 = 7+i$. En calculant un argument de $z_1^2 z_2$ de deux manières différentes, retrouver la troisième formule.

3. **a.** Pour $x \in [0, \frac{\pi}{8}[$, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan x$.

b. Montrer que $4\operatorname{Arctan}(\frac{1}{5}) = \operatorname{Arctan}\frac{120}{119}$.

c. En déduire

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Introduire des nombres complexes z_1 et z_2 pour une preuve moins calculatoire, similaire à la question 2.

d. En utilisant un développement limité de Arctan en 0,proposer une approximation de π.

Correction : :

Méthode :

1. Notons θ les membres de gauche que l'on demande de calculer. On peut calculer $\tan\theta$ (en montrons ou en supposons que l'on a le droit de faire cela), et utiliser les formules d'addition du type

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}.$$

D'après l'énoncé, on doit trouver 1. Mais il faut justifier que l'on peut revenir en arrière !

On rappelle qu'on a

$$\tan\theta = 1 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$$

Et donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ lorsque $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ce que l'on est amené à prouver à la main.

2.

3. **a.**

b.

c.

d.

Détails :

1. **a.** Notons $\theta = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}$. Supposons un instant que $\theta \notin \{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. On a

$$\tan\theta = \frac{\tan\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \tan\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}}{1-\tan\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}\tan\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1.$$

Cela prouve que $\theta \equiv \frac{\pi}{4}$ $[\pi]$. Localisons θ (ce qui au passage légitimera le calcul de $\tan\theta$). Le plus naturel est de comparer Arctan à ses valeurs connues : on a

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{3} < 1$$

et donc par sricte croissance de Arctan :

$$0 < \theta < \operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

On déduit que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b. On utilise la même méthode, mais les calculs sont plus techniques. Notons de même $\theta = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}$. Alors, en supposons que $\theta \notin \{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$:

$$\tan\theta = \frac{\tan(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}) - \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}}{1+\tan(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2})\times\tan\operatorname{Arctan}\frac{1}{7}}$$

Or on a la formule (sous réserve de validité) : $\tan(2a) = \frac{2\tan 2}{1-\tan^2 a}$. On peut bien sûr l'appliquer puisque $0 < 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} < 2\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2}$. On obtient :

$$\tan(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}) = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3}.$$

On déduit :

$$\tan\theta = \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}} = 1.$$

Cela prouve que $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$, et il reste à localiser θ. On a, par croissance de la fonction Arctan :

$$0 < 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} < 2\operatorname{Arctan}1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{4} < -\operatorname{Arctan}\frac{1}{7} < 0,$$

d'où en ajoutant :

$$-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ce qui d'une part légitime le calcul de $\tan\theta$, et d'autre part justifie que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c. La méthode est sensiblement la même, seule la localisation du membre de gauche est plus fine. On a trois termes positifs à majorer, on ne peut pas se contenter de les majorer par $\operatorname{Arctan}1 = \frac{\pi}{4}$. A quelle autre valeur connue de arctan peut-on les comparer ? On a

$$0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{1}{7} < \frac{1}{\sqrt{3}},$$

d'où par croissance de Arctan

$$0 < 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} < 3\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}} = 3\times\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Calculons le nombre complexe proposé : on a

$$z_1^2 z_2 = (3+i)^2(7+i) = 50(1+i) = 50\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Avec la convention que $\arg(z)$ est dans $[0; 2\pi[$, on a donc $\arg(z_1^2 z_2) = \frac{\pi}{4}$. Or on a aussi par les propriétés de calculs de l'arguments :

$$\arg(z_1^2 z_2) \equiv 2\arg(z_1) + \arg(z_2) \quad [2\pi],$$

On a directement, avec les formules pour l'argument :

$$\arg(z_1) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \arg(z_2) = \frac{1}{7},$$

d'où

$$2\operatorname{Arctan}(\frac{1}{3}) + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\pi].$$

On conclut comme ci-dessus en prouvant que $0 < 2\operatorname{Arctan}(\frac{1}{3}) + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

3. a. Déjà, pour $x \in [0, \frac{\pi}{8}[$, on a $4x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Ensuite, on utilise deux fois la formule pour $\tan(2x)$:

$$\begin{aligned}\tan(4x) = \frac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)} &= \frac{2\times\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{1-\left(\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}\right)^2} \\ &= \frac{4\tan x\times(1-\tan^2 x)}{(1-\tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x} \\ &= 4\times\frac{\tan x - \tan^3 x}{\tan^4 x - 6\tan^2 x + 1}\end{aligned}$$

b. Par application directe de la formule, on trouve $\tan(4\operatorname{Arctan}(\frac{1}{5})) = \frac{120}{119}$. Attention, cela prouve seulement que $4\operatorname{Arctan}(\frac{1}{5}) \equiv \operatorname{Arctan}\frac{120}{119}\ [\pi]$, et il faut maintenant justifier que $4\operatorname{Arctan}(\frac{1}{5}) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a clairement, comme ci-dessus :

$$0 < \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad 0 < 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} < \pi.$$

Or on a $\tan(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}) > 0$, donc on ne peut pas avoir $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$, intervalle sur lequel la tangente est négative. Ainsi, on a $0 < 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$, et donc on a bien

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{120}{119}.$$

c. Par application directe de la formule pour $\tan(a-b)$, on trouve (calculette autorisée) :

$$\tan(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}) = \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}} = 1.$$

La localisation est ici assez directe car on sait déjà que $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} = \operatorname{Arctan}\frac{120}{119} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, puis par décroissance de la fonction Arctan, on a directement $0 < \operatorname{Arctan}\frac{120}{119} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$. Ainsi, on a bien

$$4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Comment adapter la preuve faite avec les compexes ? Celle-ci repose sur le fait que, par application des formules liant arctangente et argument :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \arg(k+i) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{k}.$$

On introduit alors $z_2 = 5+i$ et $z_3 = 239+i$, et on forme alors $\frac{z_1^4}{z_2}$ (une fraction car il y un $-$ dans la formule proposée !). On calcule ce nombre complexe (certes, on doit développer z_2^4, ce qui est la partie calculatoire, mais se fait bien avec une calculette), et on trouve $\frac{z_1^4}{z_2} = 2+2i$, dont l'argument vaut $\frac{\pi}{4}$. On conclut avec les formules sur l'argument et l'argument de localisation.

Pour aller plus loin : Comment choisir les fractions précédentes pour que le calul marche ? On peut montrer (ce n'est pas plus dur) que pour $0 < x < y$, on a

$$\operatorname{Arctan}\frac{x}{y} + \operatorname{Arctan}\frac{y-x}{y+x} = \frac{\pi}{4}.$$

Dans cet exercice, on a mis des coefficients devant l'arctangente. On peut ainsi chercher des entiers p, q, x, y tels que $(x+i)^p(y+i)^q$ a pour argument $\frac{\pi}{4}$ (c'est-à-dire est de la forme $\lambda(1+i)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$). On peut montrer que les quatre formules proposées dans l'exercice sont les seules possibles (la première **1a** a été trouvée par Euler, celle de **3c** par Machin (1706)).

d. Puisque $\operatorname{Arctan}'(0) = 1$, les formules de développements limités à l'ordre 1 (qui ne sont rien d'autres que des approximations par la droite tangente à la courbe) donne

$$\operatorname{Arctan} x = x + x\epsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

En notation physicienne (qui n'a pas cours en mathématiques), on écrirait $\operatorname{Arctan} x \approx x$ pour $x \ll 1$. La formule précédente donne alors

$$\pi \approx 4 \times (4 \times \frac{1}{5} - \frac{1}{239}) \approx 3.18.$$

Pour aller plus loin : On n'est pas trop loin, mais quelle rigueur donner à ce calcul (ce que le physicien traduirait par : combien de chiffres significatifs mettre) ? On verra au second semestre qu'il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend de rien, et que l'on peut aussi calculer) telle que, pour $x \in]-1,1[$, on a

$$|\operatorname{Arctan} x - x| \leqslant Cx^3.$$

Cette inégalité doit vous faire penser à une mesure d'incertitude. Elle permet de quantifier l'erreur lorsque l'on approxime $\operatorname{Arctan}\frac{1}{k}$ par $\frac{1}{k}$ dans ces formules. En fait, on verra même que $\operatorname{Arctan} x$ peut être approximé, pour x petit, par $x - \frac{x^3}{3}$, ce qui a permis des mesures très précise de π.

Exercice 17 ●●○ Simplifier une somme

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n)$.
2. Simplifier la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}(\frac{1}{k^2+k+1})$$

et étudier sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Correction : :
Méthode :
Détails :

1. Notons $y_n = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n)$. Supposons un instant que $y_n \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \mathbb{Z}\}$, alors on peut en prendre la tangente, et donc :

$$y_n = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n) \implies \tan(y_n) = \tan(\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n)),$$

et donc en utilisant la formule pour $\tan(a+b)$:

$$\tan y_n = \frac{\tan\operatorname{Arctan}(n+1) - \tan\operatorname{Arctan}(n)}{1 + \tan\operatorname{Arctan}(n+1)\tan\operatorname{Arctan}(n)} = \frac{1}{n^2+n+1}.$$

et donc

$$\operatorname{Arctan}(\tan(y_n)) = \operatorname{Arctan}(\frac{1}{n^2+n+1}).$$

Or on sait que que la formule $\operatorname{Arctan}(\tan y) = y$ n'est vraie que pour $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Vérifions donc que y_n est dans cet intervalle :

- Comme Arctan est strictement croissante, on a $\operatorname{Arctan} n < \operatorname{Arctan}(n+1)$ et donc $y_n > 0$.
- On a $y_n < \operatorname{Arctan}(n+1) < \frac{\pi}{2}$

Ainsi on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in]0, \frac{\pi}{2}[,$$

et donc

$$y_n = \operatorname{Arctan}(\tan(y_n)) = \operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}.$$

2. On a avec la question précédente

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}(\frac{1}{k^2+k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k) \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan} 0, \quad \text{par télescopage}, \\ &= \operatorname{Arctan}(n+1). \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}.$$