Feuille d'exercices 6
Ensembles, logiques et fonctions

Exercice 1 ●○○ **Ensembles en extension** Ecrire les ensembles suivants en extension :

1. L'ensemble des nombres premiers entre 1 et 20.
2. l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant p \leqslant 4,\ q \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leqslant q \leqslant 2p\}$.

Exercice 2 ●●○ **Ensembles en compréhension** Ecrire les ensembles suivants en compréhension :

1. L'ensemble des nombres entiers pairs.
2. Etant données deux points A et B distincts du plan, l'ensemble des points de la droite (AB) (utiliser le vecteur $\overrightarrow{AB}$).
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables et de dérivée continue (c'est-à-dire qui sont dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$), dont la courbe est au dessus de toutes ses tangentes.

Correction :

Méthode :

1. Un nombre n pair s'écrit $n = 2p$, mais il faut quantifier p.
2. Pour $M \in (AB)$, que dire du vecteur $\overrightarrow{AM}$?
3. Commencer par écrire l'équation de la tangente en un point fixé.

Détails :

1. Notons $\mathcal{P}$ cet ensemble, on a
$$\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p\}.$$
2. On a
$$(AB) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AM} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{AB}\} = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}\}.$$
On peut aussi travailler avec des coordonnées, mais c'est plus lourd.
3. Notons F l'ensemble cherché. Pour f dérivable, et $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est
$$y = f(a) + (x-a)f'(a).$$
Ainsi,
$$F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \mid \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)\}.$$
On a vu au lycée que ces fonctions sont dites "convexes", et qu'on a $f'' \geqslant 0$ si f est deux fois dérivable, mais cela n'est pas au programme de PTSI.

Exercice 3 ○○○ **Opérations ensemblistes sur des exemples faciles** Pour chacun des cas suivants, on se donne un ensemble E et des sous-ensembles A et B. Déterminer les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $\complement_E A$.

1. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,3,5\}$ et $B = \{1,2,4,5\}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $A =]3,+\infty[$ et $B = [-4,+\infty[$
3. $E = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}$ et $B = [\![-3\,,2]\!]$ (nombre entiers entre -3 et 2). Ne pas hésiter à mixer les notations par exemple en compréhension.

Correction :

Méthode :

RAS, on applique les défs.

Détails :

1. On a
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\},\ A \cap B = \{1,3,5\},\ A \backslash B = \{3\},\ B \backslash A = \{2,4\},\ \complement_E A = \{2,4,6\}.$$
2. On a
$$A \cup B = [-4,+\infty[,\quad A \cap B =]3,+\infty[,\quad A \backslash B = \varnothing,\quad B \backslash A = [-4,3],\quad \complement_E A =]\infty,3].$$
3. On a
$$A \cup B = \{n \in E \mid n \geqslant -3\},\quad A \cap B = \{0,1,2\},$$
puis
$$A \backslash B = \{n \in E \mid n \geqslant 3\},\quad B \backslash A = \{-3,-2,-1\},\quad \complement_E A = \{n \in E \mid n \leqslant -1\}$$

Exercice 4 ●●○ Des conditions pour l'inclusion

Soit E un ensemble, et A et B deux parties de E.

1. Montrer que $A \cup B = B \iff A \subset B$.
2. Montrer que $A \cap B = B \iff B \subset A$.
3. Montrer que $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$.
4. Soit C un troisième élément de $\mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$(A \backslash B) \backslash (C \backslash B) = A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C).$$

Correction :

Méthode :

1. Utiliser qu'on a toujours $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ par définition de l'union.
2. Ressemble à la précédente, bon entrainement si on a eu des difficultés.
3. Le plus efficace est d'utiliser que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ et les règles sur l'intersection, l'union et le complémentaire. L'énoncé fait peur. Utiliser la même technique qu'à la question précédente.

Détails :

1. Montrons le sens direct. Supposons que $A \cup B = B$. Or on a toujours $A \subset A \cup B$, ainsi, $A \subset B$.
   Montrons la réciproque. Supposons que $A \subset B$. On a déjà $B \subset A \cup B$. Soit $x \in A \cup B$. Ou bien $x \in A$, et comme $A \subset B$, on a $x \in B$, ou bien $x \in B$. Dans tous les cas, $x \in B$. Cela prouve que $A \cup B \subset B$. Par double inclusion, $A \cup B = B$.
2. Montrons le sens direct. Supposons que $A \cap B = B$. On a toujours $A \cap B \subset A$ d'où $B \subset A$.
   Montrons la réciproque. Supposons $B \subset A$. On a déjà $A \cap B \subset B$. Soit $x \in B$, alors comme $B \subset A$, on a aussi $x \in A$, d'où $x \in A \cap B$. Cela prouve $B \subset A \cap B$, et par double inclusion, $A \cap B = B$.
3. On a
$$A \backslash A \cap B = A \cap \overline{A \cap B} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} = A \backslash B.$$
   La preuve marche aussi assez bien avec des quantificateurs.
4. On a (formules du cours rappelées avec des ensembles X, Y et Z quelconques) :
$$\begin{aligned}(A \backslash B) \backslash (C \backslash B) &= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C \cap \overline{B}} \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cup B) \text{ car } \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{X}} = X \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap B) \quad \text{car} \quad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ &= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup \varnothing = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\ &= A \cap (\overline{B \cup C}) \\ &= A \backslash (B \cup C)\end{aligned}$$
   Pour montrer la deuxième formule, on repart de la forme synthétique avec les intersections (qui est la plus lisible et simple à dessiner) :
$$(A \backslash B) \backslash (C \backslash B) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$$

Exercice 5 ●●○ **Différence symétrique** Soit E un ensemble, et A et B des parties de E. On appelle différence symétrique de A et de B, l'ensemble $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

1. Faire un diagramme.
2. Déterminer $A \Delta A$, $A \Delta \varnothing$ et $A \Delta E$.
3. Montrer que $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

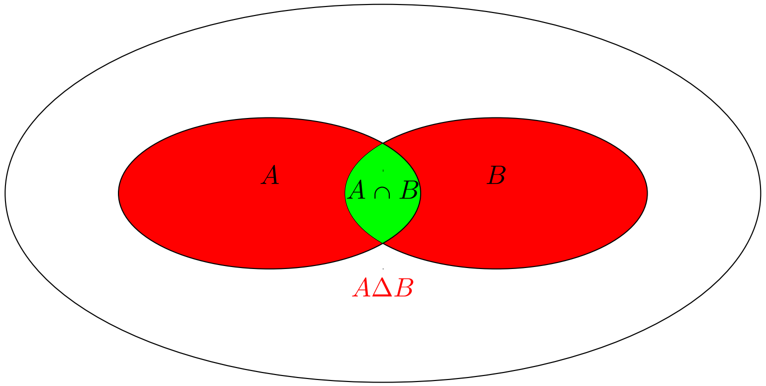
Correction :

Méthode :

1. Schéma cassique avec $A \cup B$ et $A \cap B$.
2. Ras on applique la définition.
3. Utiliser que pour deux ensembles X et Y, on a $X \backslash Y = X \cap \overline{Y}$.

Détails :

1. En rouge, l'ensemble $A \Delta B$:



2. On $A \cup A = A \cap A = A$ d'où $A \Delta A = A \backslash A = \varnothing$.
   On a $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$ d'où $A \Delta \varnothing = A \backslash \varnothing = A$.
   On a $A \cup E = E$ et $A \cap E = A$ d'où $A \Delta E = E \backslash A = A^c$.
3. On se sert de la définition :
$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$
   On déroule alors les règles de passage au complémentaire et de distribution des unions et intersections :
$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})$$

Exercice 6 ●●● — Une équation ensembliste Dans un ensemble E, A et B étant donnés, on considère l'équation

$$A \cup X = B,$$

d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait des solutions (on pourra procéder par analyse-synthèse).

2. Faire de même avec l'équation $A \cap X = B$ (un peu plus dur).

Exercice 7 ●●○ — Produit cartésien dans le plan

1. Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$, et dire s'ils peuvent s'écrire comme un produit cartésien de deux ensembles de $\mathbb{R}$ (on essayera de faire une démonstration lorsque ce n'est pas le cas).

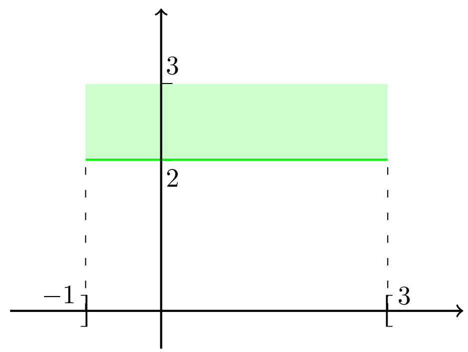
- **a.** $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 3 \text{ et } 2 \leqslant y < 3\}$.
- **b.** $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leqslant x < 4 \text{ et } y = 3\}$.
- **c.** $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2 \leqslant x < 4 \text{ et } y = 3x+1\}$.
- **d.** $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

2. Soient p_1 et p_2 les deux fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $p_1(x,y) = x$, et $p_2(x,y) = y$.

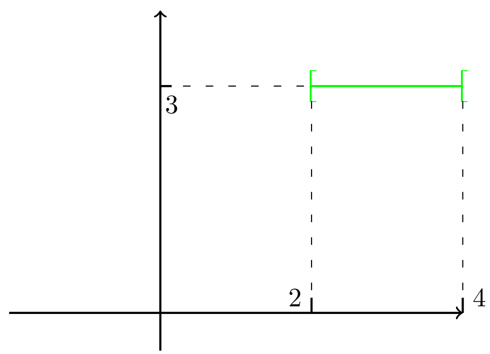
- **a.** Déterminer les images (images "ensemblistes") par p_1 et p_2 de chacun des ensembles de la question précédente.
- **b.** Soient a et b deux réels avec $a < b$. Déterminer et représenter les images réciproques $p_1^{-1}(\{a\})$ et $p_2^{-1}([a,b])$.
- **c.** Les applications p_1 et p_2 sont-elles injectives ? surjectives ?

Correction :
Méthode :
Détails :

1. **a.** On a $E =]-1,3[\times[2,3[$, il s'agit d'un produit cartésien. Ci-dessous, l'ensemble E (il s'agit d'un rectangle, dont seul le bord du bas est contenu dans l'ensemble, ce qui correspond à l'inégalité large $2 \leqslant y$).

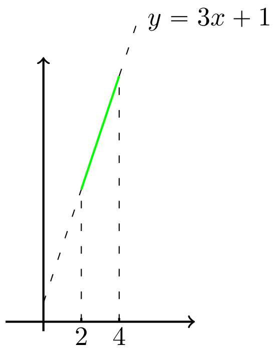


b. On a $F = [2,4[\times\{3\}$, il s'agit d'un produit cartésien. Ci-dessous, l'ensemble F (il s'agit d'un segment, fermé à gauche et ouvert à droite).



c. Il semble y avoir un problème selon les ordonnées. Supposons par l'absurde que G soit un produit cartésien : $G = I \times J$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$. On a $(2,7) \in G$, donc on a $2 \in I$ et $7 \in J$. On a aussi $(3,10) \in G$ donc $3 \in I$ et $10 \in J$. On devrait avoir $(2,10) \in G$, ce qui n'est pas le cas, car $10 \neq 3 \times 2 + 1$. On a une contradiction, donc G n'est pas un produit cartésien.

Ci-dessous, l'ensemble G (il s'agit d'un segment oblique, fermé en bas à gauche et ouvert en haut à droite).



d. Ce n'est pas un produit cartésien, on peut faire la même preuve que ci-dessus en utilisant les points $(1,0)$ et $(0,1)$. Il s'agit du cercle trigonométrique, à vous de le dessiner.

2. Soient p_1 et p_2 les deux fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $p_1(x,y) = x$, et $p_2(x,y) = y$.

a. On a directement $p_1(E) =]-1,3[$ et $p_2(E) = [2,3[$.
On a directement $p_1(F) = [2,4[$ et $p_2(F) = \{3\}$.
On pense que $p_1(G) = [2,4[$, en effet, il est clair que $p_1(G) \subset [2,4[$. Réciproquement, soit $x \in [2,4[$, alors $(x, 3x+1) \in G$, et $p_1(x,3x+1) = x$. Cela prouve que $[2,4[\subset p_1(G)$.
Pour $p_2(G)$, on ne peut le "lire" directement. Un dessin permet d'intuiter que $p_2(G) = [7,13[$ (ce sont les valeurs "extrèmes" prises par y). Démontrons-le :

$$x \in [2,4[\iff 7 \leqslant 3x+1 < 13.$$

Cela montre que $p_2(G) \subset [7,13[$. Récproquement, soit $y \in [7,13[$, alors $x = \frac{y-1}{3}$ vérifie bien $y = 3x+1$. De plus, $y \in [7,13[\iff 2 \leqslant \frac{y-1}{3} < 4$. Cela prouve :

$$\forall y \in [7,13[, \quad (\frac{y-1}{3}, y) \in G$$

et donc, puisque $p_2(\frac{y-1}{3}, y) = y$, cela donne $[7,13[\subset p_2(G)$. Finalement,

$$p_2(G) = [7,13[.$$

Pour H, on procède de même. Un dessin permet d'intuiter que $p_1(H) = p_2(H) = [-1,1]$. En effet, si $(x,y) \in H$, on a $x^2 = 1-y^2 \leqslant 1$ et donc $x \in [-1,1]$, et on a raisonnement similaire pour y. Cela prouve que $p_1(H) \subset [-1,1]$ et $p_2(H) \subset [-1,1]$. Réciproquement, soit $x \in [-1,1]$, on doit trouver un point de H dont x est l'abscisse. On pose $y = \sqrt{1-x^2}$, on a bien $(x,y) \in H$. Cela prouve que $p_1(H) \subset [-1,1]$, et donc $p_1(H) = [-1,1]$. On prouve de même que $p_2(H) = [-1,1]$.

b. L'ensemble $p_1^{-1}(\{a\})$ est

$$p_1^{-1}(\{a\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1(x,y) = a\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$$

Il s'agit de la droite d'équation $x = a$.
L'ensemble $p_2^{-1}([a,b])$ est :

$$p_2^{-1}([a,b]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid p_2(x,y) \in [a,b]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant y \leqslant b\}.$$

Il s'agit d'une bande horizontale (infinie) délimitée par les droites d'équations $y = a$ et $y = b$.

c. Les applications ne sont pas injectives, car $p_1(0,0) = p_1(0,1) = 0$ (il y a plein d'autres contres-exemples), et de même $p_2(0,0) = p_2(1,0) = 0$.
Elles sont bien surjectives : par exemple,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = p_1(x,0).$$

Ainsi tout $x \in \mathbb{R}$ a au moins un antécédant par p_1 (il en a même une infinité, qui forment une droite !). On justifie de même que p_2 est surjective.

Exercice 8 ••• Composée n^e Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définies par $g(x) = x+1$, et $h : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = \frac{x}{x+2}$.
Pour un ensemble E et une fonction $f : E \to E$, et un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la composée n^e

$$f^n = f \circ \ldots \circ f,$$

avec la convention que $f^0 = \mathrm{Id}_E$. Cette définition est faite par récurrence.

1. Déterminer g^n.
2. Peut-on définir $h \circ h$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$?
3. On note h_0 la restriction de h à $[-1,+\infty[$. Montrer que l'on peut définir $h_0 \circ h_0$, puis h_0^n.
4. Calculer h_0^n.

Correction :
Méthode :

1. S'échauffer en calculant $g^2 = g \circ g$ puis intuiter le résultat. Prouver une formule qui dépend de $n \in \mathbb{N}$? une récurrence s'impose.

Détails :

1. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^2(x) = g(g(x)) = g(x)+1 = x+1+1 = x+2.$$

On intuite que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^n(x) = x+n.$$

Cette propriété se montre par une récurrence directe.

2. Ici la subtilité de l'énoncé entre en jeu : est-on bien sûr de pouvoir composer ? La réponse est non, car la fonction h n'est pas définie en -2. Or il est possible que $h(x) = -2$: après une rapide résolution, on a en effet $h(-\frac{4}{3}) = -2$. Une manière maladroite de dire les choses est que « $-\frac{4}{3}$ est une valeur interdite pour $h \circ h$ ».
3. Puisque $-\frac{4}{3} \in [-2, -1]$, le problème précédent semble disparaître si on définit h sur $[-1, +\infty[$. Mais pourquoi cet intervalle-ci ? et pourra-t-on définir $h \circ h \circ h$?
   La clef est de tracer les variations de h sur $[-1, +\infty[$ avec un tableau. Même pas besoin de dériver : on écrit
   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\} : h(x) = \frac{x+2-2}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2},$$
   ce qui permet de dire que la fonction h est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. On déduit :
   $$\forall x \geqslant -1, \quad h(x) \geqslant h(-1) = -1$$
   c'est-à-dire :
   $$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad h(x) \in [-1, +\infty[.$$
   On dit que l'intervalle $[-1, +\infty[$ est stable par h. Ainsi, $h_0 = h_{|[-1,+\infty[}$ est à valeurs dans $[-1, +\infty[$, et on peut la composer avec-elle même. On peut aussi définir par récurrence la composée n^{e} .
4. On s'échauffe en calculant h_0^2 voire h_0^3. On a
   $$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad h_0^2(x) = h_0(h_0(x)) = h_0(\frac{x}{x+2}) = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2} + 2} = \frac{x}{x + 2(x+2)} = \frac{x}{3x+4}.$$
   On a de même :
   $$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad h_0^3(x) = h_0(h_0^2(x)) = \frac{\frac{x}{3x+4}}{\frac{x}{3x+4} + 2} = \frac{x}{7x+8}.$$
   Notez que « formellement », on a deux valeurs interdites qui sont apparues $-\frac{4}{3}$ et $-\frac{8}{7}$. Mais elles ne sont pas dans l'ensemble de définition de h_0, ouf !
   On intuite la formule
   $$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [-1, +\infty[, \quad h_0^n(x) = \frac{x}{(2^{n-1} - 1)x + 2^{n-1}}.$$
   Celle-ci se prouve par récurrence directe (preuve laissée à l'élève).

Exercice 9 ●○○ **Injective ou surjectives ?** Dire si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = |x| + |x+1|$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3, 2y - 1)$.
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(z) = |z|$.

Correction :

Méthode :

1. La fonction est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, mais toutes les valeurs sont-elles "atteintes" ? Etablir son allure permet de tout comprendre.
2. Ici la fonction dépend de deux variables, et la notation y est déjà "squattée" par l'énoncé. L'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}^2$, fixer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et résoudre $(a, b) = f(x, y)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Question facile si on connait bien les propriétés du module.

Détails :

1. On enlève les valeurs absolues en distinguant trois cas :
   - Si $x \in]-\infty, -1]$, on a $f(x) = -x - (x+1) = -2x - 1$.
   - Si $x \in [-1, 0]$, on a $f(x) = -x + (x+1) = 1$.
   - Si $x \in [0, +\infty[$, on a $f(x) = x + (x+1) = 2x + 1$.

   En particulier (tracer la fonction) :
   - Pour tout $x \in [-1, 0]$, on a $f(x) = 1$, donc la fonction n'est pas injective.
   - Le minimum de la fonction est 1, donc les nombres dans $[0, 1[$ n'ont pas d'antécédents, et la fonction n'est pas surjective.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on résout $(a, b) = f(x, y)$ d'inconnue, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :
   $$(a, b) = f(x, y) \iff \begin{cases} a = x^3 \\ b = 2y - 1 \end{cases}.$$
   La deuxième équation a une unique solution : $y = \frac{1}{2}(b+1)$. Pour la première, on remarque, par une application directe du théorème de la bijection, que la fonction $x \mapsto x^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc
   $$\forall a \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, \quad a = x^3.$$
   Finalement, l'équation $(a, b) = f(x, y)$ possède une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cela prouve que f est bijective.
   Pour aller plus loin : Notez qu'ici on a en fait montré que les fonctions coordonnées $x \mapsto x^3$ et $y \mapsto 2y - 1$ sont bijectives, ce qui rend f bijective. La situation devient plus compliquée pour une fonction f dont les coordonnées couplent ("mélangent") les variables x et y. On étudiera en détails le cas des fonctions "linéaires" au S2.
3. Notons que $f(1) = f(-1)$ (et plus généralement, pour tout complexe de la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $f(z) = r$). Cela prouve que f n'est pas injective. Par contre, si $y \in \mathbb{R}_+$, on a $f(y) = |y| = y$ ce qui prouve que y a un antécédant (et plus généralement, les antécédants de y forment le cercle de centre O et de rayon y). Donc f est surjective.

Exercice 10 ●●○ — Avec l'inversion Soit la fonction $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

1. Dire si f est injective, surjective, bijective.
2. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}_+^*)$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
4. On note $i\mathbb{R}$ la droite des complexes de partie réelle nulle. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$.

Correction :

Méthode : On applique les différentes définitions du cours :

1. On peut répondre à ces trois questions en résolvant pour $a \in \mathbb{C}$ donné (un élément de l'ensemble d'arrivée) l'équation

$$a = f(z)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$ (l'ensemble de départ).

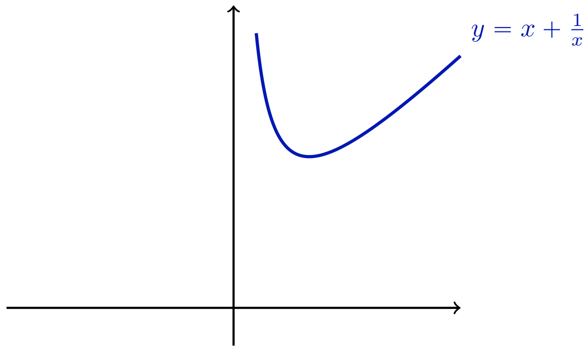
On rappelle que

- S'il y a toujours une solution, f est surjective,
- S'il n'y a jamais plus d'une solution, f est injective,
- Si on a les deux cas précédents, f est bijective.

2. Ici on ne donne à f que des valeurs réelles strictement positives, on peut donc "lire" l'image grâce à un tableau de variations. Cette méthode ne marche par si on n'est pas dans le cadre des fonctions réelles !
3. Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
4. Résoudre $f(z) \in i\mathbb{R}$. On peut par exemple résoudre $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ si on n'est pas inspiré.

Détails :

1. On résout $f(z) = a$, pour a fixé ce qui équivaut à $z^2 = az - 1$. Cette équation a toujours au moins une solution donc la fontion est surjective, mais elle peut en avoir 2 distinctes (dès que $a^2 - 4 \neq 0$), donc elle n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.
2. On étudie la fonction f, restreinte à $]0, +\infty[$. Par un calcul de dérivée, la fonction a un minimum en 1, lequel vaut $f(1) = 2$. Par lecture du tableau de variation, l'image vaut $[2, +\infty[$. Traçons pour mieux comprendre :



3. On résout $f(z) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire

$$z + \frac{1}{z} = 0 \iff z^2 + 1 = 0 \iff z = \pm i.$$

Ainsi :

$$f^{-1}\{0\} = \{-i, i\}.$$

4. En l'absence d'idée, on pose $z = a + ib$, de sorte que

$$f(z) = a + ib + \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

et $\mathrm{Re}(f(z)) = a + \frac{a}{a^2+b^2}$. Ainsi,

$$f(z) \in i\mathbb{R} \iff a + \frac{a}{a^2 + b^2} = 0 \iff a(1 + \frac{1}{a^2 + b^2}) = 0.$$

Or $1 + \frac{1}{a^2+b^2} > 0$. Ainsi, $f(z) \in i\mathbb{R} \iff a = 0$. Conclusion :

$$f^{-1}(i\mathbb{R}) = i\mathbb{R} \cap \mathbb{C}^* = i\mathbb{R}^*.$$

Exercice 11 ●○○ — Avec les chiffres des nombres

1. On considère la fonction $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier associer la somme de ses chiffres.
   a. Dire si S est injective, surjective, bijective.
   b. Déterminer la valeur maximale de $a \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de S à $[\![32\,, a]\!]$ soit une injection.
2. On considère la fonction $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier associer son dernier chiffre.
   a. Dire si D est injective, surjective, bijective.
   b. Donner l'image de D. Proposer une restriction de D qui soit une bijection sur cette image.

Correction :
Méthode :
RAS, on applique les défs.
Détails :

1. **a.** Il est clair que S n'est pas bijective puisque

$$S(11) = 2 = S(2).$$

Par contre, on peut se semander si S est surjective. On a $S(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on fabrique le nombre m comme étant le nombre avec n fois le chiffre 1. En terme litéral,

$$m = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k.$$

Alors on a bien $S(m) = n$. Cela prouve que f est surjective.
Comme S n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

b. On vérifie que S a des images toutes distinctes sur $[\![32\,,40]\!]$, tandis que $S(41) = S(32) = 5$. Ainsi, la valeur cherchée de a est $a = 40$.

2. **a.** Il est clair que S n'est pas injective puisque

$$D(11) = 1 = D(1).$$

La fonction D est à valeurs dans $[\![0\,,9]\!]$ et n'est donc pas surjective.
Elle n'est pas bijective.

b. L'image de D est $[\![0\,,9]\!]$ puisque :

$$\forall n \in [\![0\,,9]\!], \quad D(n) = n.$$

Si on pose $A = [\![0\,,9]\!]$, alors D restreinte à A est bien bijective, de A dans $[\![0\,,9]\!]$ (en fait il s'agit de la fonction idendité).
On aurait pu s'amuser à poser $A = [\![p\,,p+9]\!]$, pour un p fixé.

Exercice 12 ●●○ Image d'une intersection On a vu dans le cours que si E et F sont deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction, alors pour toutes parties A et B de E, on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

1. On suppose de plus que f est injective. Montrer qu'alors pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
2. On suppose maintenant que f n'est pas injective.
Exhiber A et B tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Qu'avons nous démontré ?

Correction :
Méthode :

1. Commencer par "matérialiser" un élément de $f(A) \cap f(B)$, puis utiliser que si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.
2. Si $x \neq x'$, que vaut $\{x\} \cap \{x'\}$?
3. Faire le bilan.

Détails :

1. Supposons que f est injective, et montrons que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
Soit $y \in f(A) \cap f(B)$, alors

$$\exists x \in A,\ y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x' \in B,\ y = f(x').$$

En particulier, $f(x) = y = f(x')$, et puisque f est injective, on a $x = x'$. Ainsi, $x \in B$ et donc $x \in A \cap B$, puis $y = f(x) \in f(A \cap B)$.
Cela prouve que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
2. Supposons donc que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, et ce pour tout sous-ensembles A et B de E. Pour montrer que f est injective , on se donne deux éléments x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$. On pose $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. On a alors $f(A) \cap f(B) = \{f(x)\} \neq \varnothing$.
Supposons par l'absurde que $x \neq x'$, on aurait alors $A \cap B = \varnothing$, mais cela contredirait $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Donc, $x = x'$, ce qui prouve que f est injective.
3. Par double implication, on a montré

$$\big(\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E),\ f(A) \cap f(B) = f(A) \cap f(B)\big) \iff f \text{ est injective.}$$

Exercice 13 ●●○ Composées et bijections
Soient E, F et G trois ensembles, ainsi que $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. Le cours nous dit que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f : E \to G$ aussi. On va étudier des propriétés de réciproques.

1. **a.** On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective.
b. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective.
c. On étudie le cas particulier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x) = (x, 0)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $g(x, y) = x$. Que dire de $g \circ f$, g et f ? Conclure.
2. Soit H un quatrième ensemble, ainsi que $h : G \to H$ une troisième fonction. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h le sont.

Correction :
Méthode :

1. Idéal pour connaître les définitions de injectif et bijectif !

a. Une fonction injective envoie deux éléments distincts sur deux images disctinctes. Ainsi, on prend $x \neq x'$ dans E. Alors puisque $g \circ f$ est injective...

b. Une fonction est surjective lorsque tout éléments $z \in G$ de l'ensemble d'arrivée a un antécédant, disons $x : z = (g \circ f)(x)$. Ce z a-t-il un antécédant par g ?

c. Il est naturel de voir ce que vaut $g \circ f$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g devrait être facile si on connait ses définitions.

2.

Détails :

1. **a.** Soient x et x' deux éléments de F avec $x \neq x'$. Si on avait $f(x) = f(x')$, on aurait aussi $g(f(x)) = g(f(x'))$, ce qui contredit $g \circ f$ injective. Cela prouve que f est injective.

b. Soit $z \in G$, alors il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$, car $g \circ f$ est surjective. En posant $y = f(x)$, on a bien que

$$\forall z \in G, \exists y \in F, \quad z = g(y).$$

Cela prouve que g est surjective.

c. La fonction $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = g(x, 0) = x,$$

ainsi $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est bijective. Par contre, il est direct que f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

En conclusion, $g \circ f$ peut bien être injective sans que g le soit, et elle peut être surjective sans que f le soit. Plus globalement, la composée peut être bijective sans qu'aucune des deux fonctions ne le soit.

Remarque : Cet exemple est facile à retenir car on "passe" par un ensemble $\mathbb{R}^2$, qui semble plus gros que $\mathbb{R}$. Mais ce genre de considération est fallacieuse...

2. La réciproque est directe, car la composée de deux bijections est une bijection. Montrons donc le sens directe. On suppose $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. Elle sont donc injectives et surjectives. Or on a en utilisant les questions précédentes :

$$h \circ g \quad \text{injective} \quad \Longrightarrow \quad g \quad \text{injective},$$

et on a également :

$$g \circ f \quad \text{surjective} \quad \Longrightarrow \quad g \quad \text{surjective}.$$

Finalement, g est à la fois injective et surjective, elle est donc bijective.

On utilise que la composée de deux bijections est une bijection : on a

$$f = \underbrace{g^{-1}}_{\text{bijection}} \underbrace{\circ\, g \circ f}_{\text{bijection}}$$

ce qui prouve que f est bijective. On montre de même que h est bijective.

Exercice 14 •○○ — Prolonger une fonction

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. Justifier que f est continue.

2. Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$.

Correction :

Méthode :

1.

2.

Détails :

1. La fonction f est quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$, dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continues sur $\mathbb{R}^*$.

2. On reconnait un taux d'accroissement, puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = 1.$$

Ainsi, si on pose $\widetilde{f}(0) = 1$, la fonction $\widetilde{f}$ est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$, et elle est bien continue. Il est standard de continuer à la noter f.

A retenir : Cet exercice, court, contient beaucoup de méthodes à savoir :

- Justifier qu'un quotient est continue, mémorisez la phrase "quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas". Ce sera la même stratégie pour montrer que "f est dérivable", ou encore "f est de classe C^k".
- La forme $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est indeterminée en 0, mais il est standard d'y reconnaître un taux d'accroissement, qui tend vers la dérivée. C'est aussi le premier pas vers les DL, voire au S2 !
- Pour prolonger par continuité une fonction en un point, on regarde si elle y admet une limite, et on prolonge par la valeur de la limite.

Exercice 15 ••• — Une inégalité pour contrôler les accroissements.

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

1. Etudier les variations de $x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

2. Montrer également que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

3. On considère la fonction $g : x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \alpha x^3$ avec $\alpha > \frac{e}{6}$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $g(x) \leqslant 0$.

4. En déduire que

$$\forall x \in [-1,1], \quad 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} \leqslant e^x \leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\alpha|x|^3.$$

5. Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$, qui est de plus dérivable.