Feuille d'exercices 5
Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1 ●○○ — Trouver les racines carrées

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = -5$ **2.** $z^2 = 7 - 24i$ **3.** $z^2 = 8e^{i\frac{\pi}{5}}$ **4.** $z^2 = 49 + 28\sqrt{2}i$

Exercice 2 ●○○ — Equations de degré 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 4z + 13 = 0$. **2.** $z^2 + (-7 + 3i)z + 22 - 14i = 0$.

Exercice 3 ●●○ — Equations de degré 3, avec une solution imaginaire pure

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = 0.$$

1. Montrer que l'équation a une solution imaginaire pure.
2. En déduire une factorisation de $z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i$
3. Résoudre l'équation.

Exercice 4 ●○○ — Equation bicarrée

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - z + 1 = 0, \quad \text{puis} \quad z^4 - z^2 + 1 = 0.$$

Exercice 5 ●○○

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + 1 = 0$. Représenter les solutions dans le plan complexe.

Exercice 6 ●●○ — En passant par les racines 4^e

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - (1 + z)^4 = 0$.

Exercice 7 ●●● — En passant par les racines n^{e}

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$.

Exercice 8 ●○○ — Avec des exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $e^z = 2$. **2.** $e^z = -2$. **3.** $e^z = e^{8+6i}$. **4.** $e^{2z} = e^{8+6i}$. **5.** $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 9 ●●● — Utilisation de j

On rappelle que $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ vérifie $j^3 = 1$.

1. Calculer $1 + j + j^2$. Mettre aussi j^2 et $-j^2$ sous forme exponentielles.
2. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. En déduire que ABC est équilatéral direct si et seulement si

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

4. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.