# Feuille d'exercices 3
# Nombres réels et fonctions réelles : première approche

## Exercice 1 ●○○ (In)équations d'ordre 1 avec valeurs absolues

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**a.** $|x+9| = 4$. **b.** $|x+4| = |x-3|$. **c.** $|x+2| + 2|x-1| + 3|x+1| = 27$.

**2.** Mêmes questions pour les inéquations suivantes :

**a.** $|x-3| > 2$.

**b.** $|x+4| \leqslant 5$.

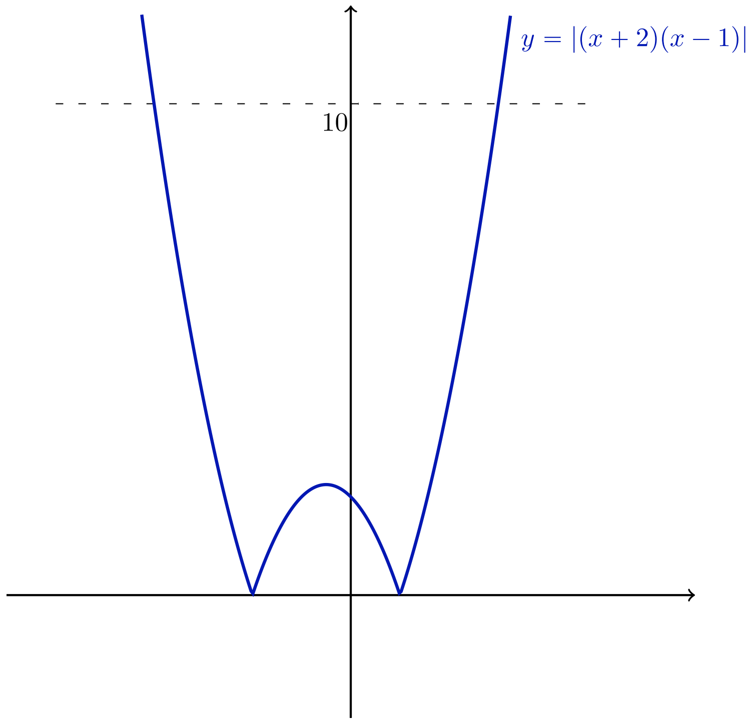
**c.** $|-3x+1| > 5$.

**d.** $|(x-1)(x+2)| > 10$.

**Correction** : Correction du **2d** (un plus dur que les autres) :

**Méthode** : On veut enlever les valeurs absolues, pour cela on raisonne selon le signe de $x+2$, et $x-1$. Il y a 3 cas possibles, correspondant à $]-\infty,-2]$, $[-2,1]$, $[1,+\infty[$. Faire un tableau de signes permet de s'y retrouver. Sur chacun de ces intervalles, on enlève les valeurs absolues en ajustant le signe, et on résout une inéquation de degré 2. On n'oublie pas de recouper les solutions trouvées avec les intervalles de résolution. Un graphe peut aider.

**Détails** : Commençons par le graphe, qui permet d'anticiper le résultat. On peut tracer la parabole $x \mapsto |(x-1)(x+2)|$, et reporter la partie négative par symétrie par rapport aux abcisses pour obtenir la valeur absolue :




Il semble que les solutions soient de la forme

$$S = ]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$$

où $a$ et $b$ sont les deux solutions de $(x-1)(x+2) = 10$, à savoir $a = -4$ et $b = 3$ (rapide en cherchant des solutions entières).

Passons à la démonstration : on distingue 3 cas :

- Pour $x \in ]-\infty,-2]$, on a $|(x-1)(x+2)| = (x-1)(x+2)$. Posons $P(x) = (x-1)(x+2) - 10$. Les solutions de $P(x) = 0$ sont -4 et 3 (on peut calculer le discriminant si on n'a pas vu les solutions évidentes), et le polynôme est strictement positif en dehors des racines. Ainsi,

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ x \in ]-\infty,-2] \end{cases} \iff x \in ]-\infty,-4[.$$

- Pour $x \in [-2,1]$, on a $|(x-1)(x+2)| = -(x-1)(x+2)$. On pose

$$Q(x) = -(x-1)(x+2) - 10 = -x^2 - x - 8.$$

Un étude rapide de discriminant montre que $Q < 0$. Ainsi, il n'y a pas de solution sur $[-2,1]$.

- Pour $x \in [1,+\infty[$, on a $|(x-1)(x+2)| = (x-1)(x+2)$. Posons $P(x) = (x-1)(x+2) - 10$. L'analyse précédente reste vraie, et,

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ x \in [1,+\infty[ \end{cases} \iff x \in ]3,+\infty[.$$

Finalement, On trouve bien

$$S = ]-\infty,-4[\cup]3,+\infty[$$

## Exercice 2 ●○○ Des (in)égalités

Les questions qui semblent faciles sont piégées !

**1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$|x-1| \leqslant \frac{x+1}{2}.$$

**2.** Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$\sqrt{x^2+4} = 3x+4.$$

**3.** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$
$$\ln(x)^2 \leqslant \ln x.$$

**4.** Etudier la fonction $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Donner en particulier son minimum.

**5.** Après avoir étudié $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3}$, montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{6} \leqslant \frac{x+1}{x^2+3} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Que vaut $f(\mathbb{R})$ ?

**Correction** : :

**Méthode** :

**1.** On enlève la valeur absolue avec une disjonction de cas.

**2.** Mettre au carré est naturel, mais attention, ce n'est qu'une implication : il faudra ensuite "faire le tri". Une rédaction claire peut utiliser un raisonnement par "analyse-synthèse".

**3.** Essayer de se ramener au signe d'une forme factorisée.

**4.** On déroule l'arsenal.

**5.** On calcule la dérivée, en on essaye de la factoriser.

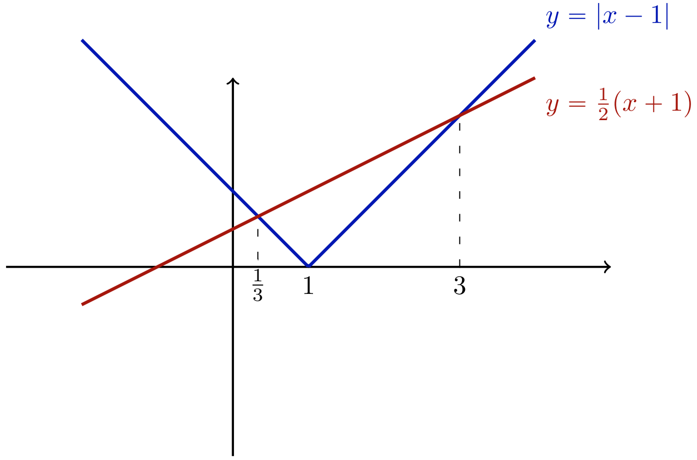
**Détails** :

**1.** On réalise une disjonction de cas, selon le signe de $x-1$ :

- Sur $]-\infty,1]$, on a $x-1 \leqslant 0$, et donc
$$|x-1| \leqslant \frac{x+1}{2} \iff -(x-1) \leqslant \frac{x+1}{2} \iff 2-2x \leqslant x+1 \iff \frac{1}{3} \leqslant x$$
Finalement, en restreignant ces solutions à l'intervalle d'étude, on trouve que
$$\begin{cases} x \in ]-\infty,1] \\ |x-1| \leqslant \frac{x+1}{2} \end{cases} \iff x \in [\frac{1}{3},1].$$
- Sur $[1,+\infty[$, on a $x-1 \geqslant 0$, et donc
$$|x-1| \leqslant \frac{x+1}{2} \iff x-1 \leqslant \frac{x+1}{2} \iff 2x-2 \leqslant x+1 \iff x \leqslant 3$$
Finalement, en restreignant ces solutions à l'intervalle d'étude, on trouve que
$$\begin{cases} x \in [1,+\infty[ \\ |x-1| \leqslant \frac{x+1}{2} \end{cases} \iff x \in [1,3].$$

Finalement, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = [\frac{1}{3},3].$$

On le lit sur le graphe suivant :




**2.** On met au carré, mais attention, ce n'est qu'une implication. Ainsi, on procède par analyse-synthèse :

Analyse :
$$\sqrt{x^2+4} = 3x+4 \implies x^2+4 = (3x+4)^2$$

$$\iff 8x^2 + 24x + 12 = 0$$
$$\iff 2x^2 + 6x + 3 = 0$$

On résout cette dernière équation par un calcul du disciminant : $\Delta = 36 - 24 = 12$, et on déduit

$$\sqrt{x^2+4} = 3x+4 \implies x = r_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad x = r_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

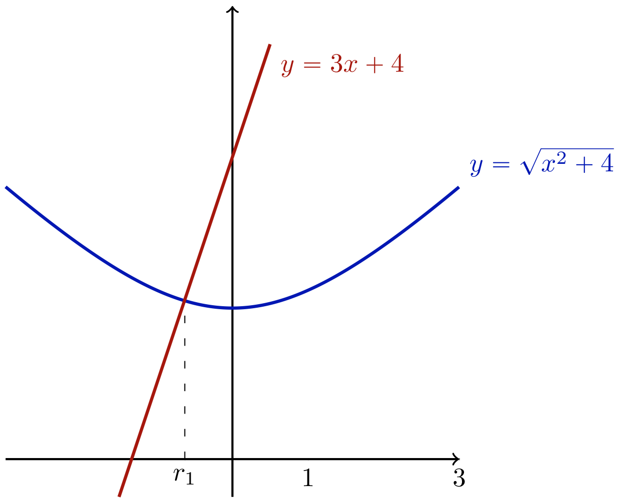
Synthèse : Il faut vérifier si ces candidats sont bien solutions. On peut injecter et constater que seul $r_1$ est solution (une alternative est d'essayer de "remonter" la première implication, lorsqu'on a mis au carré : celle-ci est une équivalence lorsque $3x + 4 \geqslant 0$).

Ainsi, $r_1$ est solution mais pas $r_2$.

Finalement :

$$\sqrt{x^2+4} = 3x+4 \iff x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On le lit sur le graphe suivant :




**3.** On pourrait simplifier par $\ln x$, mais attention, simplifier, c'est diviser, et donc on devra parler du signe... Il est plus efficace de se ramener à une forme factorisée :

$$\ln(x)^2 \leqslant \ln x \iff 0 \leqslant \ln x - \ln(x)^2 \iff 0 \leqslant \ln x \times (1 - \ln x).$$

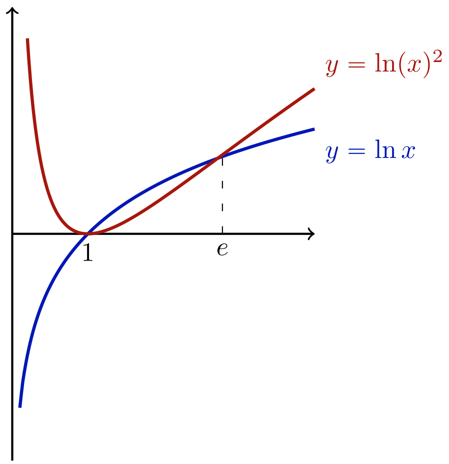
Or on a $1 - \ln x \leqslant 0 \iff e \leqslant x$. On dresse un tableau de signe :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1 - \ln x$ | \|\| | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\ln x \times (1 - \ln x)$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Finalement,

$$\ln(x)^2 \leqslant \ln x \iff x \in [1, e].$$

On le lit sur le graphe suivant :




**4.** La fonction est clairement définie sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x),$$

elle est donc paire. De plus, on

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On vérifie rapidement que $f'(x)$ est du signe de $x$. Ainsi, $f$ est

- Strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$,
- Strictement croissante sur $[0, +\infty[$,

Elle a donc un minimum en 0, qui vaut $f(0) = 1$. Ainsi :

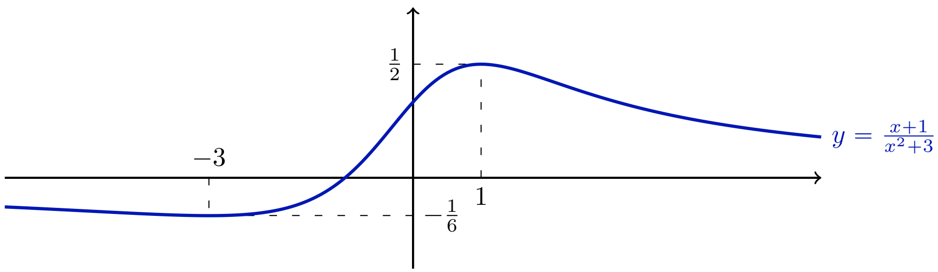
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1.$$

Pour conclure l'étude, on peut noter que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

**5.** La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \left(x^2+3\right) - 2x \times (x+1)}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 3}{\left(x^2+3\right)^2} = -\frac{(x-1)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

Il suffit alors de dresser le tableau des variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ pour conclure. Par lecture de ce même tableau, $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$.
Voyons le graphe. La fonction tend bien vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$, même si cela est lent à voir (les axes ne sont pas à la même échelle) :




## Exercice 3 •∘∘ — Contrôler le produit

Montrer que le produit de deux nombres réels est inférieur ou égal, en valeur absolue, à la moyenne de leurs carrés.

**Correction** : :
**Méthode** :
La première étape est bien de traduire l'énoncé en équation. Nommons $a$ et $b$ les nombres réels en jeu, la moyenne de leurs carrés est donc $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, et on nous demande de montrer que

$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

Manipuler un peu cette (hypothétique) inégalité pour voir d'où elle pourrait venir.
**Détails** :
On veut montrer que $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Or on a les équivalences :

$$|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2) \iff 2|ab| \leqslant a^2+b^2 \iff 0 \leqslant a^2+b^2-2|ab|.$$

Ca sent l'identité remarquable. En effet, on reconnait $(|a|-|b|)^2$ à droite. Or un carré est toujours positif, ce qui prouve l'inégalité.
**Pour aller plus loin** : Cette inégalité est classique. Ceux qui la connaissent par coeur peuvent partir de $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$ et développer, mais si on ne l'a jamais vu ce n'est pas très naturel.
Pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, cette inégalité, appliquée avec $a = \sqrt{x}$ et $b = \sqrt{y}$, devient

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}(x+y)$$

et est alors appelée "inégalité arithmético-géométrique" car elle compare la moyenne "arithmétique" bien connue $\frac{1}{2}(x+y)$ avec la moyenne "géométrique" $\sqrt{xy}$.

## Exercice 4 •∘∘ — Formules pour le min et le max

Montrer les formules suivantes :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

**Correction** : :
**Méthode** :
Comment enlever les valeurs absolue ? On raisonne selon que $x-y \geqslant 0$ (ou $\leqslant 0$). Mais alors, que vaut le max ? et le min ?
**Détails** :
Montrons la première formules. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, distinguons deux cas :

- Ou bien $x \leqslant y$. Dans ce cas-là, $x-y \leqslant 0$ et $|x-y| = y-x$. On a alors
$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y = \max(x,y) \quad \text{car } x \leqslant y.$$
- Ou bien $x \geqslant y$. Dans ce cas-là, $x-y \geqslant 0$ et $|x-y| = x-y$. On a alors
$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x = \max(x,y) \quad \text{car } x \geqslant y.$$

Dans tous les cas la formule est vraie.
On montre la formule pour le min de la même manière.

## Exercice 5 ••∘ — Un principe des tiroirs

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $(x_1, \ldots, x_n)$ des réels tels que

$$0 \leqslant x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1.$$

Montrer qu'il existe deux entiers $i$ et $j$ entre 1 et $n$ distincts tels que $|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n-1}$.

**Correction** : :

**Méthode** :

Avec toutes ces notations, on s'y perd. Prenons, un exemple, avec $n = 3$. On nous demande de montrer que parmi 3 nombres quelconque de $[0, 1]$, il y a en au moins deux espacés de moins de $\frac{1}{2}$. Logique : il n'y a pas la "place" de les espacer chacun de plus de $\frac{1}{2}$ tout en restant dans $[0, 1]$. Comment mettre cela en forme ? On peut écrire "la somme des écarts" entre chaque point...

**Détails** :

Supposons par l'absurde que

$$\forall (i, j) \in [\![1\,, n]\!]^2, \quad |x_i - x_j| > \frac{1}{n-1},$$

En particulier, on a

$$\forall i \in [\![1\,, n-1]\!]^2, \quad x_{i+1} - x_i = |x_{i+1} - x_i| > \frac{1}{n-1},$$

Et donc en sommant ces inégalités :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} = 1,$$

d'un autre côté, la somme se télescope :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_1 \leqslant 1$$

d'où une contradiction.

**Pour aller plus loin** : Une variante de l'exercice ne suppose par les $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ rangés dans l'ordre, on démarre l'exercice en les réordonnant et on conclut de même.

Plus généralement, ce type de résultat appartiennent à la classe du *principe des tiroirs*, une version générale est que si $n+1$ éléments doivent être placés dans $n$ ensembles, alors au moins un ensemble contient au moins deux éléments. Une version non matheuse existe avec des chaussettes à ranger dans des tiroirs, tandis que la version matheuse parle du nombre d'antécedant pour une fonction $f : E \to F$, avec $\operatorname{Card} F > \operatorname{Card} E$, en particulier une telle fonction ne peut pas être injective (voir chapitre "combinatoire" à venir). Ici, les "tiroirs" (ensembles) sont les intervalles $[\frac{k-1}{n-1}, \frac{k}{n-1}]$, avec $k \in [\![1\,, n-1]\!]$.

Il existe de nombreuses autres versions de ce principe.

## Exercice 6 ●●○ — Ensembles de définitions et extrema

Trouver le plus grand ensemble de définition possible pour les fonctions suivantes :

**1. a.** $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^2-64}$ **b.** $x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$ **c.** $x \mapsto \ln(|\sin x|)$

**2.** Déterminer, s'ils existent, le maximum et le minimum de ces fonctions sur leur ensemble de définition.

**Correction** : Etude de la fonction de la question **c** :

L'ensemble de définition de $f : x \mapsto \ln(x)$ est $]0, +\infty[$. Ainsi, pour définir la fonction composée $g : x \mapsto f(|\sin x|)$ sur un ensemble $\mathcal{D}$, on a la contrainte

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad |\sin x| > 0.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \geqslant 0$, de plus,

$$\sin x = 0 \iff x \equiv 0\ [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi.$$

Ainsi on pose

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Cet ensemble est une union (infinie) d'intervalles ouverts. Avec les notation du chapitre 6, on peut écrire

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]k\pi, (k+1)\pi[.$$

Déterminons si la fonction $g$ ainsi définie est majorée ou minorée, et possède des extrema. Notons dans un premier temps que pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé,

$$\lim_{x \to k\pi} g(x) = \lim_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty,$$

et donc la fonction $g$ est non minorée, et n'a donc pas de minimum.

Par contre, on a

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad |\sin x| \leqslant 1$$

et donc par croissance du logarithme :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \ln(|\sin x|) \leqslant 0.$$

La fonction $g$ est donc majorée par 0. Pour voir si c'est un maximum, on cherche des $x \in \mathcal{D}$ tels que $g(x) = 0$. On trouve :

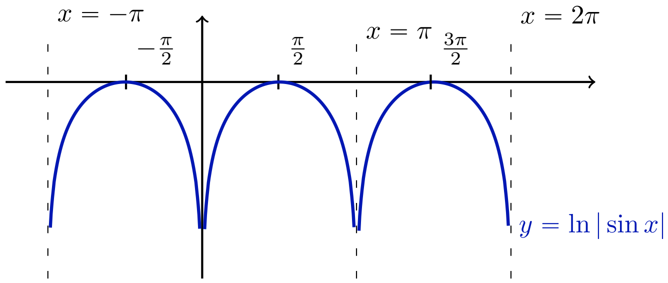
$$g(x) = 0 \iff |\sin x| = 1 \iff \sin x = \pm 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

Le maximum est donc atteint en une infinité de valeurs.

Pour aller plus loin, on peut noter que

- Si $k$ est pair, $\sin x > 0$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$, et $|\sin x| = \sin x$.
- Si $k$ est impair, $\sin x < 0$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$, et $|\sin x| = -\sin x$.

La fonction est clairement paire, elle est aussi $\pi$-périodique. Elle a des asymptotes verticales en chaque point de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (voir calcul de limite ci-dessus). On peut la tracer.




### Exercice 7 ●○○ — La racine symétrisée

Etudier la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

### Exercice 8 ●○○ — Parabole à paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$. Esquisser le graphe de la fonction pour $m = 0$.
Pour quel(les) valeur(s) du réel $y$ l'équation $y = f(x)$ admet-elle une unique solution ?

### Exercice 9 ●●○ — Centres et axes de symétrie

1. Soient $a$ un réel. Trouver une condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie.
2. Soient $a$ et $b$ deux réels. Trouver une condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède le point $M$ de coordonnées $(a, b)$ comme centre de symétrie.
3. La fonction $x \mapsto e^{-(x-4)^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, possède-t-elle un centre ou un axe de symétrie ? La tracer.

**Correction** :

1. Faisons un dessin, avec une abscisse $a$ fixée. Une telle fonction doit avoir les mêmes valeurs à une distance (notée $x$) de $a$. Cela se traduit par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(a+x) = f(a-x).$$
Une manière de voir les choses et de dire que la fonction "centrée" $g : x \mapsto f(a+x)$ est paire.
2. Faisons un dessin, avec un point $(a, b)$ fixé. Une telle fonction doit avoir une relation pour ses valeurs à gauche et à droite de $a$, plus concrêtement, si on fixe $x \in \mathbb{R}$, alors $f(a+x)$ et $f(a-x)$ sont les valeurs de $f$ aux abscisses symétriques par rapport à $a$ (à une distance $x$). La moyenne de ces valeurs doit faire $b$.
Le critère est donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(a+x) + f(a-x)}{2} = b.$$
Une manière de voir les choses et de dire que la fonction "centrée" $g : x \mapsto f(a+x) - b$ est impaire.
3. La présence d'un carré indique plutôt un axe de symétrie. Le carré s'annule pour $x = 4$, qui est sûrement l'axe de symétrie. En effet :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(4-x) = e^{-(4-x-4)^2} = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} \quad \text{et} \quad f(4+x) = e^{-(4+x-4)^2} = e^{-x^2}.$$
Pour mieux comprendre la situation : le graphe de la fonction est déduit de celui de $x \mapsto e^{-x^2}$ par une translation de $4\vec{i}$.

### Exercice 10 ●●○ — Une forme optimale

1. On souhaite fabriquer une boîte de conserve cylindrique de volumé fixé avec un minimum de matériau. Quelles proportions choisir ?
2. Même question avec une casserole.

### Exercice 11 ●●○ — Définir une composée

Déterminer (s'ils existent) les ensembles de définitions des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, puis les expliciter.

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = \ln(x-5)$.
2. $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sqrt{-x + \frac{1}{2}}$.
3. $f(x) = -e^x - 2$ et $g(x) = \ln(x+1)$.

### Exercice 12 ●●○ — Trouver des bornes

Préciser les ensembles de définitions des fonctions suivantes, puis dire si elles sont minorées, majorées, bornées, et si elles admettent un minimum ou un maximum global :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. $x \mapsto \cos(x)\cos(2x)$.
3. $x \mapsto e^{-x}\cos x$, sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$ ? Décrire également ses variations.

**Correction** :

**a.**

**b.** On a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos x \cos 2x| \leqslant |\cos x||\cos 2x| \leqslant 1 \times 1 = 1,$$
et donc la fonction $f : x \mapsto \cos x \cos 2x$ est bornée, comprise entre -1 et 1. A-t-elle un minimum et un maximum ? On peut chercher à donner les valeurs 1 et -1 simultanément à $\cos x$ et $\cos 2x$, par exemple en évaluant en $x = 0$ et $x = \pi$, et cela fonctionne, puisque
$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(\pi) = -1.$$
Ainsi, le minimum global de $f$ vaut -1 et le maximum global de $f$ vaut -1. On peut étudier les extrema locaux, mais c'est plus dur.

On a eu de la chance, et l'exercice devient beaucoup plus subtil si on considère à la place la fonction $x \mapsto \cos x \cos 3x$ : la fonction est bien sûr comprise entre -1 et 1, son maximum vaut 1 (atteint en $x = 0$), mais son minimum est autrement plus difficile à calculer, il faut mixer trigonométrie et étude de fonction.

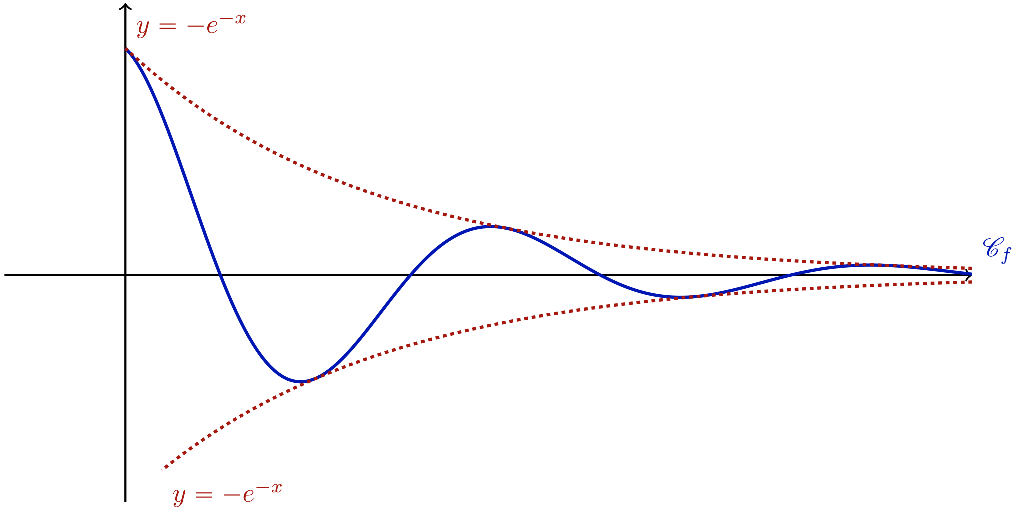
**c.** Notons $f$ la fonction. On a directement
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x},$$
donc
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leqslant e^{-x} \leqslant 1,$$
donc la fonction est bornée (on peut d'ailleurs voir qu'elle tend vers 0 en $+\infty$ par encadrement).

Sur $\mathbb{R}$, le comportement en $-\infty$ est plus dur à écrire. Certes le facteur $e^{-x}$ tend vers $+\infty$, mais le cosinus oscille. On peut exhiber une suite de points où le cosinus vaut 1, en posant pour $k \in \mathbb{Z}$
$$x_k = 2k\pi,$$
On a alors
$$f(x_k) = \cos(2k\pi)e^{-2k\pi} = e^{-2k\pi} \underset{k\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
ce qui prouve que $f$ n'est pas majorée.

On introduit de même pour $k \in \mathbb{Z}$ :
$$y_k = 2k\pi + \pi,$$
On a alors
$$f(y_k) = \cos(2k\pi + \pi)e^{-2k\pi} = -e^{-2k\pi} \underset{k\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$
ce qui prouve que $f$ n'est pas minorée.

Notez qu'on vient en fait de prouver que $f$ n'a pas de limite en $-\infty$ !

Pour décrire les extrema locaux, on calcule la dérivée de $f$ :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -(\cos x + \sin x)e^{-x}.$$
Ainsi, on doit étudier le signe de $x \mapsto \cos x + \sin x$. Frontalement, c'est dur, il faut transformer cette somme de sinusoïdes. On utilise les méthodes du cours :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}),$$
et donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{4})e^{-x}.$$
On déduit facilement les variations, et l'existence d'extrema locaux. La rédaction est laissée en exercice, mais le graphe est important à avoir en tête (on s'est concentré sur la partie $x \geqslant 0$, et les échelles ont été modifiées pour mettre en valeur les oscillations) :




Ce type de fonction intervient beaucoup en physique, dans des régimes "périodiques avec amortissement".

## Exercice 13 ●○○ Exemples de bijections

Les fonctions suivantes définissent-elles une bijection, sur un ensemble à préciser ? Si oui, donner leur fonction réciproque.

1. $x \mapsto 2x - 3$.
2. $x \mapsto 2 - \frac{1}{x-5}$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$.
3. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (commencer par préciser l'ensemble de définition).

**Correction** : :

**Méthode** :

Dans trois cas, commencer par préciser l'ensemble de définition $D_f$. Ensuite, puisqu'on demande la bijection réciproque, on peut fixer $y$ et résoudre $y = f(x)$ d'inconnue $x \in D_f$.

Mais dans quel ensemble prendre $y$ ? un tableau de variation de la fonction peut vous aiguiller en permettant de trouver l'image de $f$ (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs $y \in \mathbb{R}$ qui ont un antécédant par $f$).

L'expression de $x$ en fonction de $y$ vous permettra de définir la bijection réciproque.

**Détails** :

**1.**

**2.**

**3.** La fonction est définie sur

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 > 0\} = ]-2, 2[.$$

On cherche à résoudre, pour $y$ dans un ensemble à déterminer, $y = f(x)$, d'inconnue $x \in ]-2, 2[$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \\ &\iff \sqrt{4 - x^2} \times y = x \\ &\implies (4 - x^2) \times y^2 = x^2 \\ &\iff x^2 = \frac{4y^2}{1 + y^2}. \\ &\iff x = \pm \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}} \end{aligned}$$

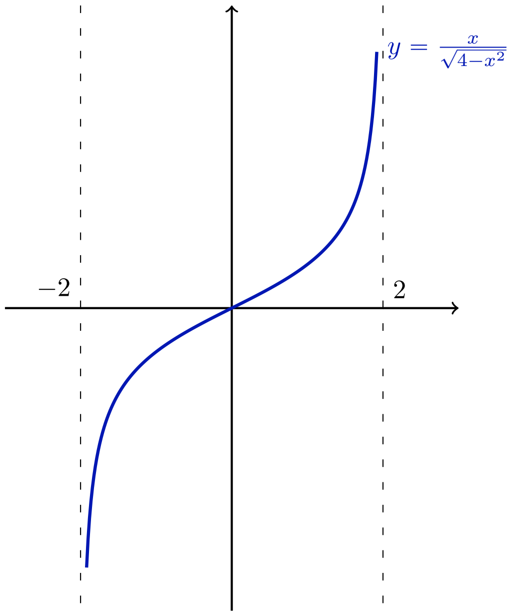
Notez bien que la troisième ligne n'est qu'une implication ! C'est une équivalence si et seulement si $x$ et $\sqrt{4 - x^2} \times y$ sont de même signe, autrement dit si et seulement si $x$ et $y$ sont de même signe. On a donc une unique solution à l'équation :

$$y = f(x) \iff x = \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, cela prouve que la fonction $f$ est une bijection de $]-2, 2[$ sur $\mathbb{R}$, et que la bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f^{-1}(y) = \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

On dessine le graphe de $f$ sur la figure suivante :




## Exercice 14 ●●● — Des calculs explicites

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

**1.** Etudier (parité, variations, limites) et tracer la fonction.

**2.** Pour $y \in \mathbb{R}$ donné, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

**3.** La fonction $f$ est-elle bijective ?

**4.** Montrer que $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ réalise une bijection de $I = [-1, 1]$ sur $[-1, 1]$, et préciser la fonction réciproque.

## Exercice 15 ●●○ — Une réciproque et sa dérivée

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{2}}{x^2 + 1}$$

**1.** **a.** Calculer $f'$.

**b.** Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et justifier que la fonction réciproque (qu'on ne cherchera pas à calculer) est dérivable.

**2.** Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.

**3.** Calculer $f(\sqrt{2})$, puis en déduire $(f^{-1})'(\frac{4}{3}\sqrt{2})$.

**4.** Vous sentez-vous capable de trouver une expresion générale pour $f^{-1}$ ?

**Correction** :

**Méthode** :

**1.** **a.** Dériver sans mettre au même dénominateur, en utilisant $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$.

**b.** Afin d'appliquer le théorème de la bijection, on doit

- Montrer que $f'$ de signe constant sur $\mathbb{R}$
- Déterminer les limites de $f$ en $\pm\infty$.
- Citer le théorème sans oublier de mentionner la continuité de $f$.

Le premier point n'est pas évident, commencer par voir ce qui est clairement positif dans l'expression de $f'$.

**2.** Pour ce genre de question, il faut avoir un peu de recul et se dire que l'on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \sqrt{2}$. On peut alors "tester" quelques valeurs de $x$, en particulier $x = 0$ ou $x = 1$, de tête. Après tout, on ne demande pas de calculer $f^{-1}(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$ quelconque, mais pour un cas particulier. La présence d'un $\sqrt{2}$ dans la formule donnant $f$ doit vous mettre la puce à l'oreille.

**3.** RAS

**4.** Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on doit résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Est-ce possible ici ?

**Détails** :

**1.** **a.** On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 1 - \frac{2x \times \sqrt{2}}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2 - 2\sqrt{2}x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}{(x^2+1)^2}.$$

**b.** Cherchons le signe de $f'$. On a clairement $(x^2+1)^2 > 0$. Il faut travailler sur le numérateur. Il est clair que $x^4 \geqslant 0$, tandis que le seul terme pouvant être négatif est $-2\sqrt{2}x$. On étudie le trinôme $x \mapsto 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$. On reconnait une identité remarquable :

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = (\sqrt{2}x - 1)^2 \geqslant 0$$

(si on ne l'a pas vu, on peut s'en sortir avec un calcul de discriminant et une étude de trinôme). Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^4 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = x^4 + (\sqrt{2}x - 1)^2 \geqslant 0.$$

Cela ne suffit pas car on veut une fonction strictement croissante ! Or les fonctions $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto (\sqrt{2}x - 1)^2$ ne s'annulent pas en même temps donc leur somme ne peut pas s'annuler. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) > 0.$$

On déduit que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a de plus

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus $f$ est strictement continue, donc par le théorème de la bijection, $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a vu que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) > 0$ et donc $f'$ ne s'annule par sur $\mathbb{R}$. On déduit du théorème que la fonction réciproque $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

A ce stade, la formule n'est pas utile car on ne connait pas $f^{-1}$ en général.

**2.** On remarque que $f(0) = \sqrt{2}$, ce qui assure que $f^{-1}(\sqrt{2}) = 0$.
Pour le calcul de la dérivée, on applique la formule du cours :

$$(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(\sqrt{2})} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

**3.** On a :

$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2+1} = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

On a donc $f^{-1}(\frac{4}{3}\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. On déduit ensuite de la formule du cours :

$$(f^{-1})'(\frac{4}{3}\sqrt{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{4}{3}\sqrt{2}))} = \frac{1}{f'(\sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{2}^2+1)^2}{Q(\sqrt{2})} = \frac{9}{4 + 2\times 2 - 2\times 2 + 1} = \frac{9}{5}.$$

**4.** Pour $y \in \mathbb{R}$ quelconques, essayons de résoudre l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = x + \frac{\sqrt{2}}{1+x^2} \\ &\iff (1+x^2)y = x(x^2+1) + \sqrt{2} \\ &\iff x^3 - yx^2 + x + \sqrt{2} - y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, trouver l'antécédant de $y \in \mathbb{R}$ revient à trouver la racine d'un polynôme de degré 3. Ce polynôme n'ayant pas une forme spécialement agréable, on voit qu'on ne peut pas déterminer facilement la fonction réciproque de $f$. Par contre on voit que lorsque $y = \sqrt{2}$, le terme constant du trinôme s'annule, et on peut trouver que la racine est $x = 0$, ce qui confirme le résultat trouvé précédamment, à savoir $f^{-1}(\sqrt{2}) = 0$.

## Exercice 16 ●●○ Décomposer avant de dérivée

1. Soient les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Préciser leurs ensembles de définition, puis pour $n \in \mathbb{N}$, calculer leurs dérivées $n^e$ .
2. En déduire la dérivées $n^e$ de $h : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur son ensemble de définition.

**Correction** :
**Méthode** :

1. Vu en cours. Intuiter les formules, et les montrer par récurrence.
2. On voit rapidement que dériver frontalement la fonction n'est pas judicieux. Il est plus intuitif de factoriser le dénominateur et de décomposer en éléments simples (souvenez-vous le calcul de $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ dans le chapitre sur les sommes), et se servir de la question précédente.

**Détails** :

1. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et la fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On a vu en cours que (preuve par récurrence après avoir intuiter la formule)
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$
On montre de même (le faire !) que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, \quad fg(n)(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$
2. Notons que la fonction $h$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. On décompose la fraction en éléments simples (calculs types déjà faits dans l'année) :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \quad h(x) = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x)\right).$$
Avec la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right).$$

On peut mettre au même dénominateur, mais cela n'apporte rien.

## Exercice 17 ●●● Passer dans le complexe

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée $n^e$ de la fonction $x \mapsto \cos(x)e^x$.
Question bonus : donner le tableau de variation de la fonction, et l'esquisser.

**Correction** :
**Méthode** :
Comme suggéré par le titre de l'exo, on va écrire $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ et manipuler des fonctions à valeurs complexes, qui sont peut-éte plus faciles à dériver. Ensuite, on prendra la partie réelle !
**Détails** :
On a $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ et donc
$$\cos x \times e^x = e^x \,\mathrm{Re}(e^{ix}) = \mathrm{Re}(e^x e^{ix}) = \mathrm{Re}(e^{(1+i)x}),$$
où on a utilisé la formule $\mathrm{Re}(az) = a\,\mathrm{Re}(z)$ pour $a \in \mathbb{R}$ afin de faire rentrer $e^x$ dans la partie réelle.
Posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = e^{(1+i)x}$. On a vu dans le cours que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (1+i)e^{(1+i)x}.$$
Par récurrence directe, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = (1+i)^n e^{(1+i)x}.$$

Pour ceux qui veulent s'entrainer à rédiger une récurrence, voici le détail, pour une fonction $g_a : x \mapsto e^{ax}$, avec $a \in \mathbb{C}$ fixé (ici, $a = 1+i$). Ceux qui pensent être à l'aise peuvent sauter ces détails. On prouve par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a^{(n)}(x) = a^n e^{ax}.$$

- Initialisation : La propriété est claire pour $n = 0$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la propriété est vraie pour ce rang $n$ :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a^{(n)}(x) = a^n e^{ax}.$$
On dérive cela :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a^{(n+1)}(x) = a^n \times (a \times e^{ax}) = a^{n+1}e^{ax}.$$
Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Or puisque par définition,
$$f' = \mathrm{Re}(g'),$$
on a directement
$$\forall \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)} = \mathrm{Re}(g^{(n)}),$$
et donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \mathrm{Re}((1+i)^n e^{(1+i)x}).$$
Il reste à calculer la partie réelle ci-dessus. Puisqu'on a des puissances en jeu, on passe bien sûr sous forme exponentielle :
$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi}{4}}.$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+i)^n e^{(1+i)x} = 2^{\frac{n}{2}} e^{\frac{ni\pi}{4}} e^{x+ix} = 2^{\frac{n}{2}} e^x e^{i(x+\frac{n\pi}{4})},$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \mathrm{Re}\left(2^{\frac{n}{2}} e^x e^{i(x+\frac{n\pi}{4})}\right) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \,\mathrm{Re}\left(e^{i(x+\frac{n\pi}{4})}\right) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos(x + \frac{n\pi}{4}).$$

On peut exprimer cette dérivée $n$-ième à partir des fonctions sin et cos avec la formule d'addition, mais cette formule factorisée, qui met en évidence un déphasage, permet de donner le signer des dérivées facilement.

On a d'après les questions précédentes :

$$f'(x) = \sqrt{2}e^x \cos(x + \frac{\pi}{4}) = e^x(\cos x - \sin x).$$

On voit l'avantage de la forme factorisée : le signe de la dérivée est celui de $x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{4})$, qui est $2\pi$-périodique. Ainsi, le signe oscille. Introduisons les points où la dérivée s'annule, en distinguant les minima locaux et les extrema locaux de $f$ : pour $k \in \mathbb{Z}$, posons

$$a_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Introduisons alors

$$I_k = ]a_k, b_k[,$$

puis

$$I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k.$$

Alors $f'$ est strictement positif sur $I$, s'annule aux valeurs $a_k$ et $b_k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et est strictement négatif sur les autres valeurs de $\mathbb{R}$.

Afin de tracer $f$, on peut noter que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -e^x \leqslant f(x) \leqslant e^x$$

et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

De plus, la partie droite (resp., gauche) de l'inégalité est une égalité lorsque $x = b_k$ (resp, $x = a_k$). Ainsi, $f$ touche son enveloppe supérieure $x \mapsto e^x$ lorsque $x = b_k$, et elle touche son enveloppe supérieure $x \mapsto -e^x$ lorsque $x = a_k$. En particulier $f$ n'est pas bornée, et oscille de plus en plus fortement lorsque $x \to +\infty$.

On peut esquisser le graphe de $f$ (les échelles ont été adaptées) :