Feuille d'exercices 3
Nombres réels et fonctions réelles : première approche

Exercice 1 ●○○ — (In)équations d'ordre 1 avec valeurs absolues

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $|x+9| = 4$. **b.** $|x+4| = |x-3|$. **c.** $|x+2| + 2|x-1| + 3|x+1| = 27$.

2. Mêmes questions pour les inéquations suivantes :

a. $|x-3| > 2$.
b. $|x+4| \leqslant 5$.
c. $|-3x+1| > 5$.
d. $|(x-1)(x+2)| > 10$.

Exercice 2 ●○○ — Des (in)égalités

Les questions qui semblent faciles sont piégées !

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$|x-1| \leqslant \frac{x+1}{2}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+4} = 3x+4.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$

$$\ln(x)^2 \leqslant \ln x.$$

4. Etudier la fonction $x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Donner en particulier son minimum.

5. Après avoir étudié $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{6} \leqslant \frac{x+1}{x^2+3} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Que vaut $f(\mathbb{R})$?

Exercice 3 ●○○ — Contrôler le produit

Montrer que le produit de deux nombres réels est inférieur ou égal, en valeur absolue, à la moyenne de leurs carrés.

Exercice 4 ●○○ — Formules pour le min et le max

Montrer les formules suivantes :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercice 5 ●●○ — Un principe des tiroirs

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $(x_1, \dots, x_n)$ des réels tels que

$$0 \leqslant x_1 < \dots < x_n \leqslant 1.$$

Montrer qu'il existe deux entiers i et j entre 1 et n distincts tels que $|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n-1}$.

Exercice 6 ●●○ — Ensembles de définitions et extrema

Trouver le plus grand ensemble de définition possible pour les fonctions suivantes :

1. a. $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^2-64}$ **b.** $x \mapsto \ln(\ln(\ln x))$ **c.** $x \mapsto \ln(|\sin x|)$

2. Déterminer, s'ils existent, le maximum et le minimum de ces fonctions sur leur ensemble de définition.

Exercice 7 ●○○ — La racine symétrisée

Etudier la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$.

Exercice 8 ●○○ — Parabole à paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$. Esquisser le graphe de la fonction pour $m = 0$.
Pour quel(les) valeur(s) du réel y l'équation $y = f(x)$ admet-elle une unique solution ?

Exercice 9 ●●○ — Centres et axes de symétrie

1. Soient a un réel. Trouver une condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie.

2. Soient a et b deux réels. Trouver une condition pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possède le point M de coordonnées (a, b) comme centre de symétrie.

3. La fonction $x \mapsto e^{-(x-4)^2}$, définie sur $\mathbb{R}$, possède-t-elle un centre ou un axe de symétrie ? La tracer.

Exercice 10 ●●○ — Une forme optimale

1. On souhaite fabriquer une boîte de conserve cylindrique de volumé fixé avec un minimum de matériau. Quelles proportions choisir ?
2. Même question avec une casserole.

Exercice 11 ●●○ — Définir une composée

Déterminer (s'ils existent) les ensembles de définitions des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, puis les expliciter.

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = \ln(x-5)$.
2. $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sqrt{-x + \frac{1}{2}}$.
3. $f(x) = -e^x - 2$ et $g(x) = \ln(x+1)$.

Exercice 12 ●●○ — Trouver des bornes

Préciser les ensembles de définitions des fonctions suivantes, puis dire si elles sont minorées, majorées, bornées, et si elles admettent un minimum ou un maximum global :

1. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
2. $x \mapsto \cos(x)\cos(2x)$.
3. $x \mapsto e^{-x}\cos x$, sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$? Décrire également ses variations.

Exercice 13 ●○○ — Exemples de bijections

Les fonctions suivantes définissent-elles une bijection, sur un ensemble à préciser ? Si oui, donner leur fonction réciproque.

1. $x \mapsto 2x - 3$.
2. $x \mapsto 2 - \frac{1}{x-5}$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$.
3. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (commencer par préciser l'ensemble de définition).

Exercice 14 ●●● — Des calculs explicites

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. Etudier (parité, variations, limites) et tracer la fonction.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$ donné, résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. La fonction f est-elle bijective ?
4. Montrer que $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ réalise une bijection de $I = [-1,1]$ sur $[-1,1]$, et préciser la fonction réciproque.

Exercice 15 ●●○ — Une réciproque et sa dérivée

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{2}}{x^2+1}$$

1. **a.** Calculer f'.
   b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et justifier que la fonction réciproque (qu'on ne cherchera pas à calculer) est dérivable.
2. Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.
3. Calculer $f(\sqrt{2})$, puis en déduire $(f^{-1})'(\frac{4}{3}\sqrt{2})$.
4. Vous sentez-vous capable de trouver une expresion générale pour f^{-1} ?

Exercice 16 ●●○ — Décomposer avant de dérivée

1. Soient les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Préciser leurs ensembles de définition, puis pour $n \in \mathbb{N}$, calculer leurs dérivées n^{e} .
2. En déduire la dérivées n^{e} de $h : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 17 ●●● — Passer dans le complexe

Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée n^{e} de la fonction $x \mapsto \cos(x)e^x$.
Question bonus : donner le tableau de variation de la fonction, et l'esquisser.