

Feuille d'exercices 4

Calculs algébriques et sommes

— Exercice 1 ●○○ — Majorer une somme

Soit n un entier non nul, écrire la somme

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

avec le symbole Σ , puis montrer qu'elle est inférieure à 1.

— Exercice 2 ●○○ — Repérer des télescopes

1. Trouver deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}, \quad \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}.$$

En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$.

2. En faisant apparaître $k+1$ au numérateur, calculer $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

— Exercice 3 ●○○ — Calcul d'une somme avec un glissement

Soit n un entier non nul, On cherche à calculer $S_n = \sum_{k=1}^n k2^k$.

1. En effectuant un glissement d'indice, exprimer S_n comme somme de deux sommes.

2. Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} k2^k$ en fonction de S_n et conclure.

— Exercice 4 ●○○ — Une quantité importante

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ la somme $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$.

— Exercice 5 ●○○ — Une autre somme de sinusoides

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ les sommes

$$C_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \cos(a + bk) \quad \text{et} \quad S_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \sin(a + bk)$$

— Exercice 6 ●○○ — Sommes doubles

Soit n un entier non nul, calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij,$

2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$

— Exercice 7 ●○○ — Deuxième calcul, avec un somme double

On va retrouver la valeur de S_n , définis dans l'exercice 3 :

1. Posons $T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 2^i$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = S_n$.

2. Intervertir la somme double et conclure.

— Exercice 8 ●○○ — Un polynôme

Soit n un entier non nul, on définit la fonction P_n sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

1. Donner P_1 et P_2 .

2. Montrer que P_n est un polynôme dont on donnera le degré.

3. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?

4. Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

5. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P_n(q)$.

— **Exercice 9** ●● —

1. Soit n un entier non nul, et k un entier compris entre 1 et n . Montrer que

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n} \binom{n}{k} \quad (\text{Formule comité-président}).$$

Retrouver $\sum_{p=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

2. En s'inspirant du cours, introduire la fonction $f(x) = (x+1)^n$ et calculer

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}.$$

— **Exercice 10** ●● —

1. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. En évaluant cela pour des p bien choisis, retrouver

$$\sum_{k=0}^n k, \quad \sum_{k=0}^n k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^3.$$

— **Exercice 11** ●● — Troisième calcul, avec un paramètre

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

1. En calculant f' de deux manières différentes, déterminer $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

2. Retrouver la somme S_n de l'exercice 3.

3. Comment calculeriez-vous $\sum_{k=1}^n k(k-1)x^{k-2}$ puis $\sum_{k=1}^n k^2 2^k$?

— **Exercice 12** ●● — Linéariser pour intégrer

Donner une primitive de $\sin^5 x$ et de $\sin^4 x \cos x$.

— **Exercice 13** ●● — De nouvelles valeurs particulières

Montrer que $\cos(4x) = 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1$. En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ puis $\sin(\frac{\pi}{8})$.

— **Exercice 14** ●● — De nouvelles valeurs particulières, bis

1. Montrer que $\sin(5x) = P(\sin x)$, où P est défini sur \mathbb{R} par $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.
 2. Montrer que $\sin(\frac{\pi}{10})$ est solution de l'équation $P(x) = 1$, puis de l'équation

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

3. Trouver deux réels a et b tels que $16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 16(x-a)^2(x-b)^2$.
 4. Donner la valeur de $\sin(\frac{\pi}{10})$.

— **Exercice 15** ●● — Une équation trigonométrique

1. Factoriser le polynôme $x \mapsto 4x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ (noter que $x = \frac{1}{2}$ est racine).
 2. Résoudre l'équation $\cos(3x) = 2 \cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.