# Feuille d'exercices 2
# Nombres complexes (et géométrie)

## Exercice 1 •◦◦ Formes algébriques et inverses

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{2}{-3+4i}, \quad z_2 = \frac{1-2i}{4+5i}, \quad z_3 = (4-2i)^3, \quad z_4 = \frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}},\ \theta \in ]-\pi, \pi[.$$

**Correction** :

**Méthode** :

1. Standard avec la méthode du conjugué.
2. Standard avec la méthode du conjugué.
3. Savez-vous développer $(a-b)^3$ ?
4. Quel est le conjugué de $e^{i\theta}$ ? On peut aussi appliquer la technique de l'angle moitié.

**Détails** :

1. Standard.
2. Standard.
3. On rappelle que
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
il n'y a plus qu'à calculer.
4. La méthode de l'angle moitié fonctionne très bien : on écrit
$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}.$$
Ainsi,
$$z_4 = \frac{e^{i\theta}}{2\cos\frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}(1 + i\tan\frac{\theta}{2}).$$

Pour ceux qui préfère utiliser la méthode du conjugué, moins naturelle :
$$z_4 = \frac{e^{i\theta}\overline{(1+e^{i\theta})}}{|1+e^{i\theta}|^2}.$$
Or on a :
$$e^{i\theta} \times \overline{(1+e^{i\theta})} = e^{i\theta}(1+\overline{e^{i\theta}}) = e^{i\theta}(1+e^{-i\theta}) = e^{i\theta} + 1 = \cos\theta + 1 + i\sin\theta$$
et
$$|1+e^{i\theta}|^2 = |1+\cos\theta + i\sin\theta|^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2 + 2\cos\theta = 2(1+\cos\theta)$$
Finalement, on a
$$z_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}.$$
A ce stade, on peut être satisfait, ou savoir que
$$1 + \cos\theta = 1 + \cos(2 \times \frac{\theta}{2})) = 2\cos^2\frac{\theta}{2},$$
tandis que
$$\sin\theta = \sin(2 \times \frac{\theta}{2}) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},$$
soit après calculs :
$$\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}.$$
Finalement,
$$z_4 = \frac{1}{2}(1 + i\tan\frac{\theta}{2}).$$

## Exercice 2 •◦◦ Equations de degré 1 (et conjugués)

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

**1.** $z + 2i = iz - 1$. **2.** $2z + i = \overline{z} + 1$. **3.** $z = \overline{z} + 2$.

## Exercice 3 •◦◦ Formes trigonométriques bidouillées

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique
$$z_1 = -3 + 3i, \quad z_2 = -5i, \quad z_3 = 2ie^{i\frac{\pi}{5}}.$$
Pour $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, même question :
$$z_4 = 1 + i\tan\theta, \quad z_5 = \sin\theta + i\cos\theta.$$

## Exercice 4 ●●○ La force du conjugué

Soient $z$ et $z'$ dans $\mathbb{U}$ tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

**Correction** :

**Méthode** : L'hypothèse $z \in \mathbb{U}$ permet de relier $z$ et $\overline{z}$. Il paraît alors pertinent d'utiliser le fait que $q \in \mathbb{R}$ si et seulement si $q = \overline{q}$, ou bien d'utiliser la technique du conjugué sur la fraction.

**Détails** : Notons que ce quotient est bien défini puisque $1 + zz' \neq 0$ par hypothèse. Appelons-le $q$. On sait que $q$ est réel si et seulement si $\overline{q} = q$. Calculons donc

$$\overline{q} = \overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\overline{z'}}$$

N'oublions pas que $z$ et $z'$ sont dans $\mathbb{U}$, ce qui veut dire

$$|z|^2 = |z'|^2 = 1,$$

et donc que

$$\overline{z} = \frac{1}{z} \quad \text{et } \overline{z'} = \frac{1}{z'}.$$

On déduit

$$\overline{q} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{zz'}} = \frac{\frac{z+z'}{zz'}}{\frac{zz'+1}{zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'} = q.$$

Cela prouve donc que $q$ est réel.

**Remarque** : Si on ne pense pas à la caractérisation « $q$ réel si et seulement si $q = \overline{q}$ », on peut essayer de multiplier numérateur et dénominateur de $q$ par $\overline{(1+zz')}$ et utiliser $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. A la fin doit reconnaître des quantités comme $z + \overline{z}$ et $z' + \overline{z'}$ qui sont réelles.

## Exercice 5 ●○○ La force de la forme exponentielle

Simplifier les nombres complexes suivants :

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{24}, \quad (\sqrt{3}-i)^n + (\sqrt{3}+i)^n \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}.$$

## Exercice 6 ●○○ Trouver la moitié

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, ecrire $1 + e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique-exponentielle. En déduire son module et son argument. Retrouver le résultat en travaillant avec la forme algébrique.
2. Même question pour $e^{3i\theta} + e^{9i\theta}$.

## Exercice 7 ●○○ De nouvelles valeurs particulières

Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. En étudiant $\frac{z_1}{z_2}$, donner les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Quelle méthode plus "bourrin" peut-on utiliser en exprimant $\frac{1}{12}$ à partir de $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ ?

**Correction** :

**Méthode** : Que veut dire l'énoncé par "étudier $\frac{z_2}{z_1}$" ? Peut-être calculer $\frac{z_2}{z_1}$ sous les deux formes que vous connaissez, et les comparer ?

**Détails** : L'énoncé sugère de calculer $\frac{z_1}{z_2}$. Faisons-le de deux manières :

- Sous forme exponentielle. On a après calculs $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et donc
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$
- Sous forme algébrique. On a directement :
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = (1+i)(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}) = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i(\frac{\sqrt{3}-1}{4}).$$
En égalisant ces deux formes, on obtient :
$$\frac{\sqrt{3}+1}{4} + i(\frac{\sqrt{3}-1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}).$$
On identifie les parties réelles et les parties imaginaires :
$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Pour calculer ces valeurs, on pouvait directement écrire

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) \quad \text{et} \quad \sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$$

et utiliser des formules d'addition.

## Exercice 8 ●●○ Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, et qui vérifie de plus

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad \begin{cases} f(z+z') = f(z) + f(z') \\ f(zz') = f(z)f(z') \end{cases}$$

Calculer $f(i)$, puis en déduire $f$.

## Exercice 9 ●●● Encore une équation fonctionnelle

Trouver les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui vérifient $f(z) + zf(-z) = 1 + z$.

**Correction** :

**Méthode** : Il s'agit d'une "équation fonctionnelle". Ce genre d'exercice original est dur car on ne sait pas toujours quelle piste suivre. Ici l'équation relie $f(z)$ et $f(-z)$, et n'est pas symétrique, il est donc naturel de l'écrire avec $-z$ à la place de $z$ pour obtenir une deuxième relation.

**Détails** :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on applique la relation vérifiée par $f$ au complexe $-z$ :

$$f(-z) - zf(z) = 1 - z.$$

On cherche à éliminer le terme en $f(-z)$, pour cela on multiplie cette dernière relation par $z$, et on la soustrait à la première. On obtient :

$$f(z) + z^2 f(z) = 1 + z - z(1 - z) \iff (1 + z^2)f(z) = 1 + z^2.$$

Si $1 + z^2 \neq 0$, c'est-à-dire si $z \in \mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$, on déduit que nécessairement

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{i, -i\}, \quad f(z) = 1.$$

Ceci est une condition nécessaire (on a en effet raisonné par implication au moment où on a ajouté deux égalités), et elle est bien susffisante comme on peut le vérifier directement.

Il reste à déterminer les valeurs de $f(i)$ et $f(-i)$. Pour n'importe quel couple $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vérifiant $b - ia = 1 - i$, on peut poser $f(i) = a$ et $f(-i) = b$. Cependant, il est naturel de poser $f(i) = f(-i) = 1$ pour obtenir une fonction continue sur $\mathbb{C}$.

## Exercice 10 ●○○ Un axe bien connu

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $|z - i| = |z + i|$.

## Exercice 11 ●●○

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que les vecteurs d'affixes $z$ et $\frac{1}{z}$ soient orthogonaux.

**Correction** :

**Méthode** : La plus efficace est d'utiliser le cours : en notant $M$ le point d'affixe $z$ et $M'$ celui d'affixe $\frac{1}{z}$, alors l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est donné par

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg \frac{z - 0}{\frac{1}{z} - 0},$$

et les calculs déroule.

Une autre stratégie consiste à écrire $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, ce qui revient au même puisqu'on raisonne sur l'argument.

**Détails** :

La plus efficace est d'utiliser le cours : en notant $M$ le point d'affixe $z$ et $M'$ celui d'affixe $\frac{1}{z}$, alors l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est donné par

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg \frac{z - 0}{\frac{1}{z} - 0} = \arg(z^2),$$

où l'argument est choisi dans $] - \pi, \pi]$, par exemple.

Ainsi, les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si

$$\begin{aligned}
&(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\
\iff\ & \arg(z^2) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\
\iff\ & 2\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\
\iff\ & \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} \ [\tfrac{\pi}{2}] \iff \arg(z) \in \{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}
\end{aligned}$$

Géométriquement, ce sont les complexes $z$ dont le point image est sur une des droites $y = x$ ou $y = -x$.

## Exercice 12 ●●● Prendre de la hauteur

On se donne des nombres complexes $a, b, c$ et $d$, avec $b \neq c$ et $a \neq c$, tels que $\frac{d-a}{b-c}$ et $\frac{d-b}{c-a}$ sont imaginaires purs.

1. Interpréter ces conditions pour les points d'affixes respectives $A$, $B$, $C$ et $D$.
2. a. Montrer en développant que $(d - a)(\overline{b} - \overline{c}) + (d - b)(\overline{c} - \overline{a}) + (d - c)(\overline{a} - \overline{b})$ est imaginaire pur.

   b. En déduire que $\frac{d-c}{a-b}$ est aussi imaginaire pur.
3. En raisonnnant *dans* le triangle $ABC$, montrer que l'on vient de prouver un résultat de géométrie bien connu.

## Exercice 13 ●○○ Identité du parallèlogramme

Montrer que pour tout nombres complexes $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2.$$

Interprétez géométriquement.

**Correction** :

**Méthode** : Pour “développer” $|a+b|^2$, on n’a pas le droit à l’identité remarquable de 4e. On peut par contre utiliser $|a+b|^2 = (a+b)\overline{(a+b)}$. Pour l’aspect géométrique, introduire les points d’affixes $z$ et $z'$, interpréter les affixes $z+z'$ ainsi que $z-z'$, et bien sûr utiliser la vision géométrique du module.

**Détails** On développe :

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'}) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}z') + |z'|^2.$$

On obtient de même :

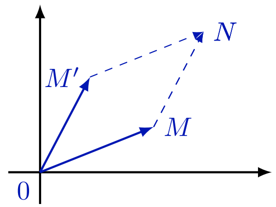
$$|z-z'|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{z}z') + |z'|^2,$$

et donc en ajoutant :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right).$$

Si on introduit $M$ et $M'$, les points d’affixes $z$ et $z'$, ainsi que $N$ le point d’affixe $z+z'$, alors l’inégalité se réécrit, en interprétant en terme de distances :

$$ON^2 + MM'^2 = 2\left(OM^2 + OM'^2\right).$$




Par construction $\vec{M'N}$ a pour affixe $z+z'-z' = z$, on a donc $\vec{M'N} = \vec{OM}$, et le quadrilatère $OMNM'$ est un parallèlogramme. On vient donc de retrouver un résultat connu de géométrie élémentaire : la somme des carrées des diagonales d’un parallélogramme est égale à la somme des carrées des quatre côtés.

**Pour aller plus loin** : Ce résultat peut aussi se montrer aussi en utilisant le produit scalaire.

## Exercice 14 ●●○ Identité remarquable chez les complexes et inégalité

Les deux questions sont indépendantes.

1. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in C$, développer $|a+b|^2$.
2. Montrer que $|a+b|^2 \leqslant (1+|a|^2)(1+|b|^2)$. Etudier le cas d’égalité (plus dur).

**Correction** :

**Méthode** :

1. Bien sûr, ce n’est pas une question de collège. On peut passer par les conjugués.
2. Dur à trouver “naturellement”, mieux vaut étudier le signe de la différence. Le terme de gauche et le thème “inégalité” doit vous faire penser à l’inégalité triangulaire.

**Détails** :

1. On a

$$|a+b|^2 = (a+b)\times(\overline{a+b}) = a\overline{a} + a\overline{b} + \overline{a}b + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2 + a\overline{b} + \overline{a}b.$$

Ces deux derniers termes doivent bien donner quelque chose, en particulier on doit y voir un nombre réel puisque $|a+b|^2 \in \mathbb{R}$. On remarque que

$$a\overline{b} + \overline{a}b = a\overline{b} + \overline{a\overline{b}} = 2\,\mathrm{Re}(a\overline{b}) \quad \text{d'après} \quad z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z),$$

ainsi :

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}(a\overline{b}).$$

Si $a$ et $b$ sont réels, on retrouve bien la formule du collège.

2. On forme la différence

$$D = (1+|a|^2)(1+|b|^2) - |a+b|^2.$$

Il paraît naturel d’écrire l’inégalité triangulaire :

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

et donc en mettant au carré :

$$|a+b|^2 \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|.$$

Cela donne :

$$\begin{aligned} D &\geqslant (1+|a|^2)(1+|b|^2) - (|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|) \\ &= 1 - 2|a||b| + |a|^2|b|^2 = |ab|^2 - 2|ab| + 1 = (|ab|-1)^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Cela prouve l’inégalité demandée. Par ailleurs, on a égalité si et seulement si toutes les inégalité précédentes sont en faites des égalutés. On sait qu’on a égalté dans l’inégalité triangulaires si et seulement si les nombres complexes $a$ et $b$ ont leurs images alignés avec l’origine, et dans le même sens :

$$|a+b| = |a| + |b| \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}_+, \quad b = \lambda a.$$

De plus, avoir une inégalité dans $(|ab|-1)^2 \geqslant 0$ donne :

$$(|ab|-1)^2 = 0 \iff |ab| = 1 \iff \lambda|a|^2 = 1 \iff \lambda = \frac{1}{|a|^2}.$$

Finalement, on a égalité pour les couples de la forme $(a,b) = (a, \frac{a}{|a|^2})$.

**A retenir** : On ne manipule pas aussi facilement $|a+b|$ que dans les réels. Ou bien on calcule $|a+b|^2$, avec un terme croisé $2\,\mathrm{Re}(a\bar{b})$, ou bien si on doit établir des inégalités, on utilise l'inégalité triangulaire $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ (dont la preuve vient du développement de $|a+b|^2$).

On a $|a+b| = |a|+|b|$ uniquement lorsque les points $O$, $A$ et $B$ sont alignés, avec $A$ et $B$ du même côté !

## Exercice 15 ●●● Identité remarquable chez les complexes et arithmétique

1. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, factoriser $a^2+b^2$ en utilisant des complexes.
2. On dit qu'un entier $N \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés lorsqu'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $N = a^2+b^2$. Soient $N_1$ et $N_2$ des entiers qui sont somme de deux carrés, montrer que $N_1N_2$ est encore somme de deux carrés.

**Correction** :

**Méthode** : Avec les réflexes du lycée, il semble que l'on ne peut pas factoriser. Pourtant, $b^2 = -(ib)^2$, ce qui conduit à une "factorisation chez les les complexes". L'idée sous-jacente est que $a^2+b^2$ est lié au module du complexe $z = a+ib$, et donc peut s'écrire sous la forme $z\overline{z}$.

Pour la suite, il suffit d'utiliser cette identité remarquable. N'oubliez pas que vous manipulez des entiers ! Cherchez des quantités "canoniques" comme des modules.

**Détails** :

1. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, on a
$$a^2+b^2 = a^2-(ib)^2 = (a+ib)(a-ib).$$
2. Soient $N_1$ et $N_2$ des entiers qui sont somme de deux carrés, autrement dit
$$N_1 = a_1^2+b_1^2 \quad \text{et} \quad N_2 = a_2^2+b_2^2.$$
On a alors
$$N_1N_2 = (a_1^2+b_1^2)\times(a_2^2+b_2^2) = (a_1+ib_1)(a_1-ib_1)(a_2+ib_2)(a_2+ib_2).$$
Que faire à ce stade ? N'oublions pas que $N_1N_2$ est un entier, ce qui doit (ré)apparaître. Pour y voir plus clair, introduisons
$$z_1 = a_1+ib_1 \quad \text{et} \quad z_2 = a_2+ib_2,$$
on a alors
$$N_1N_2 = z_1\overline{z_1}\times z_2\overline{z_2} = z_1z_2\overline{z_1z_2} = |z_1z_2|^2.$$
Or
$$z_1z_2 = a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1),$$
et donc
$$N_1N_2 = (a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2,$$
ce qu'on aurait trouvé en développant tout dans le calcul de $N_1N_2$.

**Pour aller plus loin** : Il existe des liens profonds entre l'arithmétique et les nombres complexes. Ce croisement donne lieu à la "théorie des nombres", un domaine difficile des mathématiques, où on obient des résultats sur des nombres entiers à l'aide des nombres complexes.

## Exercice 16 ●●○ Encore du conjugué

Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $4z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

**Correction** :

**Méthode** : Comme souvent, écrire $z = x+iy$ peut marcher, mais avec des calculs. On peut utiliser le fait que $Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $Z = \overline{Z}$.

**Détails** : Utlisons la méthode ci-dessus (vous êtes invités à faire l'exercice en posant $z = x+iy$ pour comparer).

On a :
$$4z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff 4z+\frac{1}{z} = \overline{4z+\frac{1}{z}} = 4\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}.$$
On peut supposer que $z \in \mathbb{C}^*$, sinon $\frac{1}{z}$ n'est pas défini. On déduit :
$$\begin{aligned}4z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R} &\iff 4z+\frac{1}{z} = \overline{4z+\frac{1}{z}} = 4\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\\ &\iff z\overline{z}(4z+\frac{1}{z}) = z\overline{z}\left(4\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)\\ &\iff 4z|z|^2+\overline{z} = 4\overline{z}|z|^2+z\\ &\iff 4(z-\overline{z})|z|^2 = z-\overline{z}.\\ &\iff z=\overline{z} \quad \text{ou} \quad |z|^2 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$
Ainsi, les nombres complexes solutions du problème sont ceux qui sont sur l'axe réel ou sur le cercle de centre l'origine de rayon $\frac{1}{2}$.

## Exercice 17 ●●○ Eviter trop de calculs

On cherche les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1. Montrer que cette équation est équivalente à $z\overline{z}-(z+\overline{z}) = 7$.
2. Faire apparaître la quantité $|z-a|^2$ pour un $a \in \mathbb{C}$ bien choisi et conclure.

**Correction** :

**Méthode** : Si on écrit $z = x+iy$, cela peut aboutir mais il faut être à l'aise avec les équations cartésiennes de cercle (chapitre géométrie du plan, S2). L'énoncé propose une méthode alternative avec les conjugué.

**1.** On commence par écrire

$$|\frac{z-3}{z-5}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{|z-3|}{|z-5|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{2}|z-3| = |z-5| \iff 2|z-3|^2 = |z-5|^2,$$

la dernière équivalence venant du fait que toutes les quantités sont positives. On développe ensuite :

$$\begin{aligned} 2|z-3|^2 = |z-5|^2 &\iff 2(z-3)\overline{(z-3)} = (z-5)\overline{(z-5)} \\ &\iff 2z\overline{z} - 6(z+\overline{z}) + 18 = z\overline{z} - 5(z+\overline{z}) + 25 \\ &\iff z\overline{z} - (z+\overline{z}) = 7. \end{aligned}$$

**2.** Notons qu'on a, par des calcus similaires : $|z-a|^2 = z\overline{z} - (\overline{a}z + a\overline{z}) + |a|^2$. Ainsi, on choisit $a$ pour que $\overline{a}z + a\overline{z} = z + \overline{z}$, donc $a = 1$. On obtient alors :

$$z\overline{z} - (z+\overline{z}) = |z-1|^2 - 1,$$

et donc d'après la question précédente

$$|\frac{z-3}{z-5}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff |z-1|^2 = 8.$$

Ainsi, l'ensemble des $z$ qui vérifient la condition sont exactement les complexes dont l'image est sur le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

## Exercice 18 ●●○ Une fraction qui se simplifie

1. Pour quelles valeurs de $z$ les points d'affixes 1, $z$ et $z^2$ sont-ils distincts deux à deux (c'est-à-dire tous distincts) ?
2. On suppose que les points d'affixes 1, $z$ et $z^2$ sont distincts deux à deux. Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes 1, $z$ et $z^2$ sont alignés.
3. Plus dur : même question avec $z$, $z^2$ et $z^4$.

**Correction** :

**Méthode** :

Utilisez à fond : trois points distincts $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un nombre réel. Pour le deuxième, passez à une forme algébrique après simplifications.

**Détails** :

**1.** On suppose $z \notin \{0,1\}$, de sorte que les trois points soient disctincts. Les trois points sont alignés si et seulement si

$$\frac{z^2-1}{z-1} \in \mathbb{R} \iff z+1 \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}.$$

**2.** Déjà, on élimine les cas $z^2 = z$, $z^4 = z$ ou $z^4 = z^2$, qui correspondent à des points non distincts, et qui revient après calculs à $z \in \{1, -1, 0, j, \overline{j}\}$. Ensuite, on procède de même. Les points sont alignés si et seulement si

$$\arg(\frac{z^4-z}{z^2-z}) \equiv 0 \ \ [\pi] \iff \frac{z^4-z}{z^2-z} \in \mathbb{R}.$$

Or on calcule :

$$\frac{z^4-z}{z^2-z} = \frac{z(z^3-1)}{z(z-1)} = \frac{z(z-1)(z^2+z+1)}{z(z-1)} = z^2+z+1.$$

Alors, les trois points sont alignés si et seulement si $z^2+z+1 \in \mathbb{R}$. A ce stade, il est pertinent de revenir à une forme algébrique. On pose $z = x+iy$, et on obtient

$$z^2+z+1 = x^2-y^2+x+1+i(y+2xy).$$

Ainsi :

$$\frac{z^4-z}{z^2-z} \in \mathbb{R}, \quad y+2xy = 0 \iff y = 0 \ \text{ ou } \ x = -\frac{1}{2}.$$

Les points solutions sont donc l'union des droites $y = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$.

## Exercice 19 ●●●

Que pensez-vous de l'affirmation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad z^n \in \mathbb{R}.$$

On pourra utiliser que $\pi \notin \mathbb{Q}$...

**Correction** :

**Méthode** :

Si on essaye $\theta = \frac{\pi}{m}$, l'affirmation est vrai... mais il y a d'autres angles que ceux de la forme $\frac{\pi}{m}$. Il faut analyser la situation pour trouver un argument qui marche.

**Détails** :

On écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, on a alors

$$z^n = r^n e^{in\theta}.$$

Ainsi, $z^n \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$n\theta \equiv 0 \ \ [\pi].$$

A ce stade, on demande de trouver un $\theta$ tel que ceci n'est jamais vérifié. Or,

$$n\theta \equiv 0 \ \ [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \ \theta = \frac{k\pi}{n} \implies \frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}.$$

Ainsi, si on prend $\theta = 1$, puisque $\pi \notin \mathbb{Q}$, on trouve bien que $z^n$ n'est jamais réel.

## Exercice 20 ••• — Etude d'une similitude

**1.** (Cas particulier). Soit la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$s(z) = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + \sqrt{3}(1-i)$$

**a.** Montrer que l'équation $s(z) = z$ possède une unique solution dans $\mathbb{C}$, notée $\omega$. La calculer.

**b.** Déterminer un nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $s(z)-\omega = \alpha(z-\omega)$. On pensera à écrire $s(z) - \omega = s(z) - s(\omega)$.

**c.** Mettre $\alpha$ sous forme trigonométrique et donner la nature géométrique de $s$.

**2.** (Cas général) Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Dans les questions qui suivent, pour un $z$ donné, on pourra représenter le vecteur d'affixe $z - \omega$, et décrire le point d'affixe $f(z)$.

**a.** Pour un $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, expliquer et illustrer avec un dessin la nature géométrique d'une fonction vérifiant $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant $f(z) - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

**b.** Pour un $\lambda > 0$ fixé, même question avec une fonction vérifiant $f(z) - \omega = \lambda(z - \omega)$.

**c.** Même question avec une fonction vérifiant $f(z) - \omega = \omega - z$.