

Feuille d'exercices 26

Probabilités 2 : Variables aléatoires

— **Exercice 1** ●○○ — **Deux nombres parmi cinq** Une urne contient cinq boules sur lesquelles sont inscrits respectivement les nombres $-2, -1, 0, 1$ et 2 . On tire simultanément deux boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au produit de ces deux nombres.

- Déterminer la loi de X .
- Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- Déterminer la loi de X^2 .
- Calculer de deux manières différentes $E(X^2)$.

— **Exercice 2** ●●○ — **Différence de deux dés** On lance deux dés équilibrés à six faces. On appelle X la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros de ces deux dés.

- Déterminer la loi de X .
- Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

— **Exercice 3** ●●○ — **QCM** Un QCM est constitué de 10 questions. Pour chaque question, il y a 4 réponses dont 1 seule est juste. Toute absence de réponse est considérée comme une réponse fautive. Les points sont attribués ainsi : 2 points par bonne réponse et $-0,5$ par réponse fautive. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses et Y la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.

- Déterminer la loi de X , calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- Montrer que : $Y = 2,5X - 5$ et en déduire $E(Y)$.
- Déterminer la probabilité d'obtenir une note supérieure ou égale à $17,5$.
- Les concepteurs du QCM se posent toujours la question du choix des paramètres de points positifs et négatifs afin d'éviter que les candidats ne répondent au hasard. A partir de ce QCM, ils attribuent x points par bonne réponse et y par réponse fautive (où x et y sont des réels positifs).
Montrer que : $E(Y) = \frac{5x-15y}{2}$.
- En déduire qu'il est tout de même « raisonnable » que $x \geq 3y$.

— **Exercice 4** ●●○ — **Temps d'attente** Une urne contient $n \geq 3$ boules numérotées de 1 à n indiscernables au touché. On retire les unes après les autres toutes les boules de l'urne, en notant l'ordre du tirage.

- Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?
- Quelle est la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement (dans n'importe quel ordre).
- On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirage nécessaire pour avoir tiré les boules 1, 2 et 3. Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance

— **Exercice 5** ●○○ — **Un exemple de lois conjointes et marginales** Une urne contient une boule blanche, une verte, et deux boules rouges. On extrait successivement les quatre boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y celui de la deuxième boule rouge.

- Représenter dans un tableau la loi conjointe de X et de Y .
- En déduire les lois marginales de X et de Y .
- Calculer les espérances et les variances de X et Y .
- Déterminer la loi de $V = \min(X, Y)$.
- Soit Z le temps d'attente entre la première boule blanche et la deuxième boule rouge (en valeur absolue). Exprimer Z en fonction de X et Y , puis donner la loi de Z .

— **Exercice 6** ●●○ — **Lois géométrique et hypergéométrique sur un exemple** Un(e) étudiant(e) de PTSI désireux de réviser pendant les vacances constitue une liste de 20 exercices de mathématiques et 25 sur les autres matières, dont i (elle) écrit les énoncés sur des fiches cartonnées et les place dans une boîte. Cet(te) étudiant(e) adore les maths (comment pourrait-il en être autrement ?!).

- L'étudiant(e) décide de piocher « au hasard » une fiche dans sa boîte, la traiter, la replacer « au hasard » dans la boîte et recommencer. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fiches piochées afin d'obtenir pour la première fois un exercice de maths. Déterminer la loi de X et l'espérance de X .
- On reprend la même situation, mais l'étudiant(e) ne remplace pas la fiche avant d'en piocher une autre. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de fiches piochées afin d'obtenir pour la première fois un exercice de maths. Déterminer la loi de Y et l'espérance de Y .
- On reprend la même situation, mais l'étudiant(e) choisit cette fois 5 fiches au hasard (sans remise). On appelle Z la variable aléatoire décrivant le nombre de fiches de maths piochées. Déterminer la loi de Z et l'espérance de Z .

— **Exercice 7** ●●○ — **Loi hypergéométrique** Une population d'élèves de PTSI forment deux groupes disjoints : les matheux et les matheuses d'un côtés et les amateurs et amatrices de SI de l'autre (et tant pis pour la physique), dans des proportions $p \in [0, 1]$ et $q = 1 - p$. On sélectionne n élèves au hasard (un nombre inférieur à la population totale). On note X le nombre de matheux et matheuses obtenu.

1. Déterminer la loi de X .
2. (Plus dur) Déterminer l'espérance et la variance de X .
3. On suppose que la population est de $2n$ élèves. Que donnent les formules précédentes dans ce cas-là ?

— **Exercice 8** ●●○ — **Maximum de variables aléatoires** On tire au hasard, successivement et avec remise deux boules d'une urne contenant n boules indiscernables au touché, numérotées de 1 à n . On appelle Z la variable aléatoire correspondant au maximum des deux boules tirées.

1. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, calculer la probabilité $P(Z \leq k)$.
2. En déduire la loi de Z .
3. Reprendre l'exercice avec deux tirages successifs avec remise.

Correction :

1. Notons X_1 le numéro de la première boule tirée, et X_2 celui de la deuxième. Ces deux variables suivent des lois uniformes, elles sont par ailleurs indépendantes :

$$X_1 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket) \quad \text{et} \quad X_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket).$$

Elles sont par ailleurs indépendantes, et on a

$$Z = \max(X_1, X_2).$$

On peut alors décrire l'évènement concerné :

$$(Z \leq k) = (X_1 \leq k) \cap (X_2 \leq k).$$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 étant indépendantes, on a alors

$$P((X_1 \leq k) \cap (X_2 \leq k)) = P(X_1 \leq k) \times P(X_2 \leq k) = \frac{k}{n} \times \frac{k}{n}.$$

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on écrit l'évènement $Z = k$ en fonction de ce qui précède :

$$(Z \leq k) = (Z = k) \cup (Z \leq k - 1),$$

Cette formule gardant un sens pour $k = 1$, l'évènement $Z = 0$ étant impossible. La réunion étant disjointe :

$$P(Z \leq k) = P(Z = k) + P(Z \leq k - 1) \iff P(Z = k) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k - 1)^2}{n^2}$$

en utilisant le résultat de la première question. Après simplification :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(Z = k) = \frac{2k - 1}{n^2}.$$

On vérifie que la somme de ces probabilités vaut 1.

— **Exercice 9** ●●○ — **Variables indépendantes (ou pas)** On tire une carte au hasard dans un jeu non truqué de 32 cartes. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si la carte est un as et 0 sinon, Y la variable aléatoire égale à 1 si la carte est un valet et 0 sinon, Z la variable aléatoire égale à 1 si la carte est un pique et 0 sinon.

1. Établir la loi conjointe de X et Y ainsi que les lois marginales.
2. Établir la loi conjointe de Y et Z ainsi que les lois marginales.
3. X et Y sont-elles indépendantes ? Même question pour Y et Z .

— **Exercice 10** ●●● — **Suite de variables aléatoires : marche aléatoire sur une droite** Soit $p \in [0, 1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite. A l'instant initial, elle est sur l'origine, et à chaque instant elle fait un bond d'une unité vers la droite ou vers la gauche avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de la puce à l'instant n .

1. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.
2. On suppose désormais que $p = \frac{1}{2}$.
 - a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que la puce soit à l'origine à l'instant $2k$.
 - b. (Plus dur). Pour $n \in \mathbb{N}$, on note N_n le nombre de passages à l'origine entre l'instant initial et l'instant n . Calculer l'espérance de N_n et donner un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$.

— **Exercice 11** ●●○ — **Inégalités probabilistes** On suppose que le nombre de fois où un élève consulte son téléphone par heure est une variable aléatoire notée X d'espérance 20.

1. Majorer la probabilité que l'élève ait consulté son téléphone au moins 60 fois en une heure.
2. La variance de X est égale à 5. « Estimer » la probabilité de sortir entre 15 et 25 fois son téléphone.

— **Exercice 12** ●●○ — **Estimer un risque d'erreur** On effectue une suite de lancers d'un dé à six faces. Quel nombre de lancers suffit-il de faire pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 est comprise entre $\frac{1}{6} - 0,01$ et $\frac{1}{6} + 0,01$? On pourra utiliser une inégalité probabiliste.