Feuille d'exercices 23
Déterminants

Exercice 1 ●○○ **Premiers calculs** Calculer les déterminants suivants et discuter de l'inversibilité des matrices associées :

1. $D_1 = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a+d & a \\ b+d & b \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} \cos a & \sin b \\ \sin a & \cos b \end{vmatrix}$, $D_4 = \begin{vmatrix} j & j \\ 1 & -j \end{vmatrix}$.
   On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ vérifie $j^3 = 1$.
2. $E_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \\ -1 & 7 & 6 \end{vmatrix}$, $E_2 = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 2 \\ 1 & 2-x & -4 \\ -1 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$, $E_3 = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{vmatrix}$.
3. $\begin{vmatrix} ab & b^2 & a^2 \\ a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \end{vmatrix}$ (On peut vérifier la valeur de E_3 au passage).

Exercice 2 ●●○ **Avec de la trigo**

1. Soit
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}.$$
   Montrer que $D = \sin(b-c) + \sin(c-a) + \sin(a-b) = -4\sin(\frac{b-c}{2})\sin(\frac{c-a}{2})\sin(\frac{a-c}{2})$. On pourra déterrer les formules
$$\sin p + \sin q = \qquad \text{et} \qquad \cos p - \cos q =$$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les trois vecteurs $(1, \sin a, \cos a)$, $(1, \sin b, \cos b)$ et $(1, \sin c, \cos c)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 ●●○ **Une technique classique** Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère le déterminant
$$D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

1. (Méthode classique : on voit que la somme de chaque ligne est constante)
   a. Réaliser l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$ et factoriser pour faire apparaître une colonne de 1.
   b. Retirer la première ligne à toutes les autres puis conclure.
2. (Méthode par récurrence).
   a. Réaliser l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_n$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_n$. Développer par rapport à la ligne de votre choix.
   b. En déduire que $D_n = 2(x-1)D_{n-1} - (x-1)^2 D_{n-2}$ et retrouver la formule précédente.
3. Pour quelle valeur de x la matrice associée est-elle inversible ?

Exercice 4 ●●○ **Déterminant de Vandermonde** Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère le déterminant
$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Le but de l'exercice est de montrer la formule suivante (classique) :
$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

1. Démontrer la formule pour $n = 2$ et $n = 3$.
2. On introduit la fonction
$$\begin{array}{rccl} F : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & V(a_1, \dots, a_{n-1}, X) \end{array}$$
   Prouver que F est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égale à $n-1$, déterminer le coefficient de t^{n-1} et calculer les nombres $F(a_1), \dots, F(a_{n-1})$.

3. Dans cette question seulement, on suppose que tous les nombres $a_1, \dots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux, prouver la formule

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad V(a_1, \dots, a_{n-1}, t) = V(a_1, \dots, a_{n-1})(t - a_1)(t - a_2) \dots (t - a_{n-1}).$$

4. Expliquer pourquoi la formule précédente est aussi valide si deux des nombres $a_1, \dots, a_{n-1}$ sont égaux.
5. A l'aide d'un argument par récurrence sur n, démontrer la formule générale annoncée au début de l'exercice de $V(a_1, \dots, a_n)$.
6. Combien de facteurs de la forme $a_i - a_j$ y a-t-il dans $V(a_1, \dots, a_n)$?
7. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice associée, dite de Vandermonde, soit inversible.

Exercice 5 ●○○ — Déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire Montrer qu'une matrice carrée antisymétrique de taille impaire n'est jamais inversible.

Exercice 6 ●●○ — En attendant la deuxième année : une première diagonalisation Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème « trouver $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$ » a une solution si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\det(A - \lambda I_3)$. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
3. Pour chacune des valeurs λ trouvées à la question précédente, appellée *valeurs propres de* A, résoudre l'équation $AX = \lambda X$.
4. En déduire une matrice de passage P inversible telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, que l'on précisera.
5. Exprimer le déterminant de A à partir des valeurs propres.

Exercice 7 ●○○ — Déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire Montrer qu'une matrice carrée antisymétrique de taille impaire n'est jamais inversible.

Exercice 8 ●●○ — Lien avec la dimension

1. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_2$. En déduire un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie $u^2 = -\operatorname{Id}$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n. On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie $u^2 = -\operatorname{Id}$. Que dire de n ?

Exercice 9 ●○○ — Inverser une matrice Déterminer si la matrice suivante est inversible, et le cas échéant, l'inverser :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 ●●○ — Système à paramètre, le retour On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}.$$

1. Mettre le système associé sous forme matricielle, et dire pour quelle valeur de m la matrice associée est inversible. Pour ces cas-là, résoudre le système.
2. Compléter l'étude en résolvant le système pour les valeurs de m restantes.