Feuille d'exercices 21
Séries numériques

Exercice 1 ●○○ Donner la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2-1}{n^2+10^9}$. **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. **4.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2-n\cos n}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$. **7.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\ln\left(1+e^{-n}\right)$. **8.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 ●○○ Donner la nature des séries suivantes, et lorsqu'elles convergent, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{4}{n(n+1)(n+2)}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2^n}{3^{n+2}}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{2^n}$

Correction :

Méthode : On peut souvent justifier la convergence sans trop de calcul pour « scorer ». Ensuite, l'énoncé dit « calculer », cela veut dire qu'on doit pouvoir expliciter les sommes. On a peu d'outils pour cela : sommes télescopiques, sommes géométriques (et ses dérivées). Ouvrons l'oeil.

1. Clairement convergent par équivalent avec une série de Riemann. Pour le calcul, tenter une décomposition en éléments simples en espérant un télescopage.
2. Pas loin d'être géométrique. Mettre en valeur une suite géométrique et c'est fini.
3. Penser aux formules de dérivée des sommes géométriques.

Détails :

1.
2. On a

$$\frac{2^n}{3^{n+2}}=\frac{1}{3^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

Or la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{2}{3}\in]-1,1[$, elle est donc convergente, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{9}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

3. A cause du n, ce n'est pas une somme géométrique. Commençons par rendre à la raison sa liberté, et calculons $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}nx^n$. On reconnait une somme dérivée : on pose

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}x^n=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}.$$

On a alors

$$\forall x\neq 1:\quad f'(x)=\sum_{n=0}^{N}nx^{n-1}=\frac{-(N+1)x^N(1-x)+(1-x^{N+1})}{(1-x)^2},$$

puis en multipliant par x :

$$\forall x\neq 1:\quad \sum_{n=0}^{N}nx^n=x\times\frac{-(N+1)x^N(1-x)+(1-x^{N+1})}{(1-x)^2}.$$

Si $x\in]-1,1[$, on peut prendre la limite $N\to+\infty$: la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}nx^n$converge, et on a

$$\sum_{n=0}^{N}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

On obtient le résultat demandé pour $x=\frac{1}{2}$.

Remarque : on peut aussi calculer cette somme avec un glissement d'indice, mais la preuve par la série dérivée est plus dans l'idée de la deuxième année.

Exercice 3 ●●○ **Encadrement d'une somme** On considère pour $n\geqslant 2$ la somme partielle

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}.$$

1. Encadrer S_n à l'aide d'une intégrale de la fonction $t\mapsto\frac{1}{t\ln t}$.

2. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k\ln k}$ diverge, ainsi que l'équivalent des sommes partielles
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Correction :
Méthode :

1. Reprendre l'encadrement série-intégrale vu dans le cours. C'est technique mais assez central.
2. Comment primitiver la fonctio précédente ? L'énoncé suggère le résultat.

Détails :

1. On reprend la méthode du cours. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante sur $[2, +\infty[$ (étude rapide de dérivée). Ainsi, on a
$$\forall k \geqslant 3 : \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On somme de $k = 3$ à n :
$$\int_3^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_2^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
On ajoute le premier terme :
$$\frac{1}{2\ln 2} + \int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \int_2^{n} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t.$$
2. On reconnait que $\frac{1}{t\ln t} = \frac{u'(t)}{u(t)}$ avec $u(t) = \ln t$. Ainsi, on a
$$\int^x \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln(|\ln x)|)$$
On déduit de la question précédente :
$$\forall n \geqslant 3 : \quad \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 3)\,\mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n)) - \ln(-\ln 2).$$
Déjà, cela montre que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, et donc la série diverge. De plus, on divise cela par $\ln(\ln(n))$, on montre que $\ln(\ln(n+1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ (mettre n en facteur dans $\ln(\ln(n+1))$, et on déduit par encadrement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$, ce qui donne l'équivalent demandé.
Pour aller plus loin : Il s'agit là d'une série de Betrand, ce sont des séries du type $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$. C'est le cas $\alpha = 1$, le plus technique, les autres se traitant par comparaison avec les séries de Riemann.

Exercice 4 ●●○ — Somme des factorielles On considère la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!$

1. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ (on pourra majorer les termes de $\frac{S_{n-1}}{n!}$).
2. En déduire la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{S_n}{(n+1)!}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{S_n}{(n+2)!}$.

Correction :
Méthode :

1. Clairement, en détachant le dernier terme $n!$ de S_n, on se ramène à montrer que $\frac{S_{n-1}}{n!}$ tend vers 0. Mais ce n'est pas si direct... détacher encore une fois puis majorer brutalement.
2. L'équivalent précédent fournit des équivalence avec des séries de Riemann.

Détails :

1. On a
$$\frac{S_n}{n!} = \frac{n! + S_{n-1}}{n!} = 1 + \frac{S_{n-1}}{n!}.$$
Ainsi, il nous reste à trouver la limite de $\frac{S_{n-1}}{n!}$. Si on majore brutalement S_{n-1} par « nombre de termes×plus grand terme », on voit que cela ne suffit pas : en fait les termes de la somme grandissent vite, enlevons donc le dernier. Ecrivons :
$$\frac{S_{n-1}}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k!.$$
Or :
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-2} k! \leqslant \frac{1}{n!} \times \Big(\underbrace{(n-2)}_{\text{nb termes}} \times \underbrace{(n-2)!}_{\text{plus grand terme}} \Big) = \frac{n-2}{n(n-1)}.$$
Ainsi, on a
$$0 \leqslant \frac{S_{n-1}}{n!} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}.$$
On conclut par encadrement que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}}{n!} = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n!} = 1,$$
ce qui prouve l'équivalent demandé.

2. On déduit de la question précédente :

$$\frac{S_n}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{S_n}{(n+1)!}$ diverge.
Par contre, on a :

$$\frac{S_n}{(n+2)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{S_n}{(n+2)!}$ converge.

Exercice 5 ●●○ — Séries convergentes modifiées Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum u_n^2$ **2.** $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ **3.** $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ (comment majorer ab par a^2 et b^2 ?)

Correction :
Méthode :

1. On ne sait rien sur u_n ! Enfin, si : puisque la série $\sum u_n$ converge, alors nécessairement ? Comment comparer alors u_n et u_n^2 ? Penser à quantifier.
2. Comme ci-dessus : donner la limite de u_n, puis un équivalent.
3. Ecrire $(a-b)^2 \geqslant 0$ pour comparer ab et a^2+b^2.

Détails :

1. Puisque la série $\sum u_n$ converge, alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Or on sait que $\forall x \in [0,1]$, on a $x^2 \leqslant x$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \text{donc } 0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n.$$

Or la série $\sum u_n$ converge, donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n^2$ converge aussi.

2. Comme ci-dessus : puisque la série $\sum u_n$ converge, alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On a alors (vérifiez que le quotient tend bien vers 1) :

$$\frac{u_n}{1+u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n,$$

Or la série $\sum u_n$ converge, donc par équivalence des séries à termes positifs, $\frac{u_n}{1+u_n}$ converge aussi.
On pouvait aussi écrire que $0 \leqslant \frac{u_n}{1+u_n} \leqslant u_n$.

3. Pour deux rées $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(a-b)^2 \geqslant 0 \iff ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2),$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{n^2}).$$

Or la série $\sum u_n$ converge, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ aussi en tant que série de Riemann, donc par comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge aussi.
A retenir : La majoration $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ est très classique et utile : on peut y penser dès qu'on veut des informations sur un produit ab, alors qu'on a des informations sur les carrés séparés.

Exercice 6 ●●○ — Règle de d'Alembert On présente ici un outil de deuxième année. Soit (u_n) une suite à terme strictement positifs, de sorte que l'on puisse former le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

1. On suppose que $\ell < 1$.
   a. Soit $k \in]\ell, 1[$. Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \quad u_{n+1} \leqslant k u_n.$$

   b. On déduire que la série $\sum u_n$ converge.
2. On suppose que $\ell > 1$, ou bien que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$. Montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \quad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Conclure.
3. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Montrer qu'on ne peut pas conclure en donnant deux exemples de telles suite, telles que les séries associées converge et diverge.

Correction :

1. On suppose que $\ell < 1$.

a. L'énoncé invite à écrire la définition de la limite :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N : \quad \ell - \epsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \epsilon.$$

On choisit ϵ pour que $\ell + \epsilon < k$, donc $\epsilon \in]0, k - \ell[$, ce qui est bien possible puisque $k - \ell > 0$ (dessin d'un axe avec ℓ, $\ell + \epsilon$, k et 1 obligatoire).
On a alors :

$$\forall n \geqslant N : \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \epsilon < k \iff u_{n+1} \leqslant k u_n.$$

b. L'inégalité précédente va nous permettre de comparer (u_n) à une suite géométrique. On a, pour $n \geqslant N$, et par récurrence directe :

$$u_{n+1} \leqslant k u_n \leqslant \ldots \leqslant k^{n-N} u_N = k^n \frac{u_N}{k^N}.$$

Or la série $\sum_{n \geqslant N} k^n$ est une série géométrique convergente, puisque $k \in]0, 1[$. En ayant en tête que $N \in \mathbb{N}$ est fixé, on déduit que la série $(\sum u_n)$ converge, par majoration des séries à termes positifs.

2. On montre l'inégalité par un raisonnement similaire. Ainsi, la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, et converge vers une limite $L \in]0, +\infty]$. Donc, la série associée diverge grossièrement.

3. Pour les suites $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$, les quotients $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tendent vers 1, la première série $(\sum u_n)$ diverge, tandis que la deuxième $(\sum v_n)$ converge.
On dira qu'on est dans le « cas douteux » du quotient de d'Alembert.

Exercice 7 ••• Vers la formule de Stirling On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k})$.

1. Montrer que $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.
2. En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n \geqslant 1}$ converge.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel strictement positive, que l'on notera $\frac{1}{C}$.
4. En déduire que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Remarque : On peut montrer que $C = \sqrt{2\pi}$, en utilisant les intégrales de Wallis vues au TD « intégration ».

Correction :
Méthode :

1. Technique mais très classique, idéal pour s'entrainer aux simplifcations. Prendre son temps avant de prendre le logarithme.
2. On doit avoir le réflexe de dire que la série précédente converge, mais quel lien ave la suite (et pas série !) $(\ln(u_n))$? Comme souvent dans ce genre de question, repérer un télescopage.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel strictement positive, que l'on notera $\frac{1}{C}$.
4. En déduire que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Détails :

1. Formons le quotient, et simplifions ce qui est évident, les factorielles et les exponentielles :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1} \times n!}{(n+1)! \times n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-1} \sqrt{n+1}}{(n+1) n^n \sqrt{n}}$$

Regroupons les puissances :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} \frac{(n+1)^n \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n}} = e^{-1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}}$$

(Si on n'a pas mis la racine en puissance $\frac{1}{2}$, ce n'est pas grave). On est enfin prêt à prendre le logarithme :

$$\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = -1 + (n + \frac{1}{2}) \ln(\frac{n+1}{n}) = -1 + (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n}).$$

Un DL de $\ln(1 + x)$, avec $x = \frac{1}{n}$, semble naturel, et vu ce qu'on nous demande de montrer, on le fait à l'ordre 3 (le terme d'ordre 3 donnera un terme en $\frac{1}{n^2}$ après multiplication par $n + \frac{1}{2}$) :

$$\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = -1 + (n + \frac{1}{2})(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})) = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}),$$

après calculs. Cela prouve l'équivalent demandé.

2. On sait que la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc d'après la question précéente, par équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge. Or cette série est en fait télescopique, puisque la somme partielle vérifie :

$$\forall n \geqslant 1 : \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\frac{u_{k+1}}{u_k}) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_n) - \ln(u_0).$$

Puisque la série converge, les sommes partielles ont une limite fines, et donc la suite $(\ln(u_n))$ converge.

3. La suite $(\ln(u_n))$ converge vers un réel ℓ, donc par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\ell} > 0.$$

4. Direct avec la définition de (u_n).

Exercice 8 ••○ **Série harmonique et constante d'Euler** Soit la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer en utilisant des intégrales que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.

2. Soit la série harmonique « corrigée » $u_n = H_n - \ln n$. Former $u_{n+1} - u_n$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note γ sa limite.

3. En déduire le développement asymptotique

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

4. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{1+\ldots+n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{n}$.