Feuille d'exercices 21
Séries numériques

Exercice 1 ●○○ Donner la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2-1}{n^2+10^9}$. **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$. **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. **4.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2-n\cos n}$. **6.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$. **7.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(1+e^{-n}\right)$. **8.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 ●○○ Donner la nature des séries suivantes, et lorsqu'elles convergent, calculer leur somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$ **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n}{3^{n+2}}$ **3.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n}$

Exercice 3 ●●○ Encadrement d'une somme On considère pour $n \geqslant 2$ la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

1. Encadrer S_n à l'aide d'une intégrale de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$.
2. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k\ln k}$ diverge, ainsi que l'équivalent des sommes partielles
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Exercice 4 ●●○ Somme des factorielles On considère la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

1. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ (on pourra majorer les termes de $\frac{S_{n-1}}{n!}$).
2. En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{S_n}{(n+1)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{S_n}{(n+2)!}$.

Exercice 5 ●●○ Séries convergentes modifiées Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Etudier la nature des séries suivantes :

1. $\sum u_n^2$ **2.** $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ **3.** $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ (comment majorer ab par a^2 et b^2 ?)

Exercice 6 ●●○ Règle de d'Alembert On présente ici un outil de deuxième année. Soit (u_n) une suite à terme strictement positifs, de sorte que l'on puisse former le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$

1. On suppose que $\ell < 1$.
   a. Soit $k \in]\ell, 1[$. Montrer que
   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \quad u_{n+1} \leqslant k u_n.$$
   b. On déduire que la série $\sum u_n$ converge.
2. On suppose que $\ell > 1$, ou bien que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$. Montrer que
   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N \quad u_{n+1} \geqslant u_n.$$
   Conclure.
3. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Montrer qu'on ne peut pas conclure en donnant deux exemples de telles suite, telles que les séries associées converge et diverge.

Exercice 7 ●●● Vers la formule de Stirling On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$.

1. Montrer que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 1}$ converge.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel strictement positive, que l'on notera $\frac{1}{C}$.
4. En déduire que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$.

Remarque : On peut montrer que $C = \sqrt{2\pi}$, en utilisant les intégrales de Wallis vues au TD « intégration ».

Exercice 8 ●●○ — **Série harmonique et constante d'Euler** Soit la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer en utilisant des intégrales que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.
2. Soit la série harmonique « corrigée » $u_n = H_n - \ln n$. Former $u_{n+1} - u_n$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note γ sa limite.
3. En déduire le développement asymptotique

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$$

4. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{1+\ldots+n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{n}$.