Feuille d'exercices 22
Matrices et applicatons linéaires

Exercice 1 ●○○ — **Applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$** Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques associées.

1. La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -2x + y)$.
2. La fonction $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u : (x, y, z) \mapsto (x+y+z, x-y+z, 2x+y+2z)$.
3. La fonction $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $v : (x, y, z) \mapsto (y + 2z, z, x + y)$.
4. Les fonctions $2u - 3v$ et $f \circ v$. Et $v \circ f$? (il y a un piège).

Exercice 2 ●○○ — **Changement de bases dans $\mathbb{R}^3$** Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, 1, -1))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Un élément de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) dans $\mathcal{B}'$. Quelles sont ses coordonnées dans $\mathcal{B}$? Et sa matrice dans $\mathcal{B}$?
3. Un élément de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans $\mathcal{B}$. Quelles sont ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$? Et sa matrice dans $\mathcal{B}'$?
4. Soit la fonction $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u : (x, y, z) \mapsto (x+y+z, x-y+z, 2x+y+2z)$. Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, puis dans la base $\mathcal{B}'$ (on utilisera une matrice de passage).

Correction :

Méthode :

1. Large choix : montrer à la main que la famille est libre, former le déterminant de la matrice de la famille si on a vu ce chapitre, etc..
2. Former la colonne X' des coordonnées dans $\mathcal{B}'$ et utiliser la formule $X = PX'$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
3. Cette fois-ci on a $X' = P^{-1}X$.
4. On donne rapidement A, la matrice dans $\mathcal{B}$, puis on écrit $B = P^{-1}AP$ pour obtenir la matrice dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 ●○○ — **Applications linéaires chez les polynômes** Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques associées.

1. La fonction $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ définie par $f : P \mapsto (X^2 - 1)P' - 6XP$.
2. La fonction $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $u : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$.

Exercice 4 ●○○ — **Matrices dans différentes bases de polynômes** Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f : P \mapsto (X+1)P' - P'(1)X^2$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, ainsi que les familles

$$\mathcal{B}' = (1, 1 + X, X + X^2) \text{ et } \mathcal{B}'' = (1 + X + X^2, 1 + X, 1 + X^2).$$

1. Vérifier que f définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, et que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ forment deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ (on pourra utiliser des matrices de passage).
4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ (on pourra utiliser des matrices de passage, ou pas).
5. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(f)$ (on pourra utiliser des matrices de passage).

Correction :

Méthode :

1. Il est Standard de montrer que f est un endomorphisme. Il est utile pour cette question comme pour la suite de former

$$P' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P'' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Standard.
3. Utiliser la formule du cours
$$B = Q^{-1}AP$$
où A est la matrice dans les base d'origine, P la matrice de changement de base de départ, et Q la matrice de changement de base d'arrivée. Ici qui sont P et Q ? (ici on ne change que la base d'arrivée par rapport à **Q2**).
4. Utiliser la formule du cours (ici on ne change que la base de départ par rapport à **Q2**).
5. Utiliser la formule du cours (ici on change les deux pases par rapport à **Q2**).

Détails :

1.

2. Notons $A = \mathrm{Mat}(\mathcal{B})(u)$. On trouve

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(X) = 1 + X - X^2 \\ f(X^2) = 2X \end{cases}$$

ce qui donne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Utilisons la formule du cours, qui s'éclaire si on remarque que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$, et que la matrice de passage d'une base vers elle même est I_3. On a alors avec les notations précédente :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (P')^{-1} A I_3 = (P')^{-1} A.$$

Il reste à calculer.

4. On peut bien sûr répondre à la main en calculant les images de $\mathcal{B}'$. Pour s'entrainer, on utilise plutôt la formule du cours. En s'inspirant de la question précédente :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(u) = I_3^{-1} A P'' = A P''.$$

5. C'est la formule du cours :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(u) = (P')^{-1} A P''$$

Exercice 5 ●●○ — Changement de bases Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension 2 et 3. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soient enfin

$$\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}' = (f_1 + f_3, f_2 + f_3, f_3).$$

1. Vérifier que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$ sont des bases respectives de E et F.

2. Soit $x \in E$, de coordonnées (x_1', x_2') dans $\mathcal{B}'$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

3. Soit $x \in E$, de coordonnées (x_1, x_2) dans $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$.

4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

Correction :

Méthode :

1. Au choix montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est libre, ou écrire la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ et vérifier qu'elle est inversible. Cette deuxième option est aussi utile si on doit changer de bas dans la suite...

2. Utiliser la formule de changement de base.

3. Utiliser la formule de changement de base. dans l'autre sens.

4. On a quasiment préparé le terrain avec les matrices de passage, il reste à utiliser la bonne formule du cours.

Détails :

1. La matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si on a déjà vu le déterminant, on peut dire que le déterminant est non nul, et la matrice est inversible. Sinon, on calcule son inverse, ce qui de toute façon sera utile pour les questions suivantes. Un algorithme du pivot montre que P est inversible, et que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'inversibilité de P prouve que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de E.
En procédant comme ci-dessus, on a

$$Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut déjà dire que Q est triangulaire à coefficient diagonaux non nuls, elle est donc inversible. Un algorithme du pivot donne

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On peut bien sûr le faire à la main, mais c'est l'occasion d'utiliser les représentations en colonnes et les formules matricielles de changement de base. Notons

$$X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Alors ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = PX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' - x_2' \end{pmatrix}.$$

3. On utilise la même méthode mais dans l'autre sens, en utilisant que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P^{-1}.$$
Notons
$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
On obtient
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = P^{-1}X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

4. Notons B la matriche cherchée, on applique la formule :
$$B = Q^{-1}AP$$
avec
$$Q = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{C}), \quad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \text{ et } P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$
Toutes ces matrices sont déjà connues, et il n'y a plus qu'à calculer le produit.

Exercice 6 ●●○ — Système de suites, puissances et matrice diagonale On considère trois suites réelles $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant les relations
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = -2x_n - z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - 2y_n + z_n \end{cases}$$

1. Ecrire le problème sous forme matricielle à l'aide d'une matrice A, puis exprimer (x_n, y_n, z_n) en fonction de A, n, et des termes initiaux.
2. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que ces vecteurs forment une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. Calculer Ae_i pour chacuns des $(e_i)_{i=1,2,3}$, et déterminer $P^{-1}AP$, où P est la matrice dont les colonnes sont les $(e_i)_{i=1,2,3}$. On évitera d'effectuer le produit matriciel.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n, puis une expression de (x_n, y_n, z_n) en fonction de (x_0, y_0, z_0).
4. On fixe $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 2)$. En déduire les termes généraux des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$. Que dire de $(z_n)_{n\geqslant 0}$?

Correction :

1. On introduit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, alors on a :
$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Puisque $X_{n+1} = AX_n$, par récurrence directe (déjà vu au chapitre sur les matrices),
$$X_n = A^n X_0.$$

2. On peut vérifier rapidement que (e_1, e_2, e_3) est libre, donc c'est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ puisque $M_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 3.
Tout aussi efficace, et utile pour la suite : formons la marice P des vecteurs (e_i) dans la base canonique :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Il suffit de montrer que P est inversible pour prouver que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base. Après un pivot rapide, on vérifie que c'est le cas, et on obtient au passage :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
On a directement après calculs :
$$\begin{cases} Ae_1 = e_1 \\ Ae_2 = -e_2 \\ Ae_3 = 2e_3 \end{cases}.$$
On déduit que $P^{-1}AP$ est diagonal, avec
$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Comment le justifier ? Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors il est clair que f a pour matrice D dans la base (e_1, e_2, e_3). Puisque P est la matrice de passage depuis la base canonique vers (e_1, e_2, e_3), on déduit de la formule de cours de changement de base : $D = P^{-1}AP$.

Alternative : Un autre point de vue, formateur, est de calculer les colonnes de $P^{-1}AP$ en évaluant cette matrice sur la base canonique (C_1, C_2, C_3). En effet, pour une matrice M, on sait que MC_i est la ième colonne de M. Ainsi,

$$P^{-1}APC_1 = P^{-1}AP\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = P^{-1}Ae_1 = P^{-1}e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ainsi, la première colonne de $P^{-1}AP$ est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. On fait pareil pour les autres colonnes et on retrouve D.
L'année prochaine, on pourra donner directement la forme diagonale de $P^{-1}AP$ sans justifications.

3. On a :

$$D = P^{-1}AP \iff A = PDP^{-1},$$

puis par récurrence facile (voir cours) :

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Or, puisque D est diagonale, on a :

$$D^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & (-1)^n & 0\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}.$$

On déduit après calculs, puisqu'on a déjà P et P^{-1} :

$$A^n = \begin{pmatrix}1 & 1-2^n & -1+2^n\\-1+(-1)^n & -1+(-1)^n+2^n & 1-2^n\\-1+(-1)^n & -1+(-1)^n & 1\end{pmatrix}$$

En utilisant $X_n = A^nX_0$ (voir question 1), on déduit :

$$X_n = \begin{pmatrix}x_0 + (1-2^n)y_0 + (-1+2^n)z_0\\(-1+(-1)^n)x_0 + (-1+(-1)^n+2^n)y_0 + (1-2^n)z_0\\(-1+(-1)^n)x_0 + (-1+(-1)^n)y_0 + z_0\end{pmatrix}$$

4. Pour ces valeurs de $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$, on a :

$$\begin{cases} x_n = 2^{n+1} - 1 \sim 2^{n+1}\\ y_n = (-1)^n) + 1 - 2^{n+1} \sim -2^{n+1}\\ z_n = 1 + (-1)^n\end{cases}$$

La suite z_n oscille entre les valeurs 2 et 0, elle est bornée, contrairement aux autres.

Exercice 7 ●●○ — Encore des polynômes Soit la fonction, u définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $u : P \mapsto (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$.

1. Vérifier que u définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Sans utiliser de matrices, déterminer $\ker(u)$. Que déduire pour u ?
3. Vérifier en utilisant la matrice de u dans la base canonique ce que vous avez trouvé pour $\ker(u)$ et $\operatorname{Im} u$.

Correction :

1. On vérifie de manière classique que u est linéaire en montrant que pour P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\alpha P + \beta Q) &= (X^2+2)(\alpha P + \beta Q)'' + (X+1)(\alpha P + \beta Q)' + (\alpha P + \beta Q)\\ &= (X^2+2)(\alpha P'' + \beta Q'') + (X+1)(\alpha P' + \beta Q') + (\alpha P + \beta Q)\\ &= \alpha\left((X^2+2)P'' + (X+1)P' + P)\right) + \beta\left((X^2+2)Q'' + (X+1)Q' + Q)\right)\\ &= \alpha u(P) + \beta u(Q), \end{aligned}$$

ce qui prouve que u est linéaire.
De plus, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\deg((X^2+2)P'') = 2 + \deg P'' = 2 + \deg P - 2 = \deg P,$$

et de manière analogue :

$$\deg((X+1)P') = \deg P,$$

ainsi,

$$\deg(u(P)) \leqslant \max(\deg((X^2+2)P''), \deg((X+1)P'), \deg P) = \deg P.$$

Cela prouve que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \deg(u(P)) \leqslant 2 \iff u(P) \in \mathbb{R}_2[X],$$

et donc que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On résout l'équation

$$u(P) = 0$$

d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
Supposons P non nul. On peut raisonner sur le coefficient dominant de P, a_n, avec $n \in \{0,1,2\}$. On a alors

- Le polynôme $(X^2+2)P''$ a alors un coefficient dominant $n(n-1)a_n$,
- Le polynôme $(X+1)P'$ a alors un coefficient dominant na_n,

et ainsi, $u(P)$ a un coefficient en X^n qui vaut $(n(n-1)+n+1)a_n = (n^2+1)a_n$. Or $a_n \neq 0$, donc le coefficient de degré n de $u(P)$ ne peut s'annuler. Cela contredit $u(P)=0$.
Ainsi, la seule solution de $u(P)=0$ est le polynôme nul. Cela prouve que $\ker(u)=\{0\}$, et que u est injectif. Puisque u est un endomorphisme, on déduit que u est bijectif.

3. Soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On calcule les images de la base par u :
$$u(1)=1,\quad u(X)=2X+1,\quad u(X^2)=5X^2+2X+4.$$
Ainsi,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}1&1&4\\0&2&2\\0&0&5\end{pmatrix}$$
Cette matrice est triangulaire, avec des coefficients diagonaux non nuls. Ainsi, la matrice est inversible, et donc l'endomorphisme u qu'elle représente est bijectif.

Exercice 8 ●●○ — Noyau et image d'une matrice Soit $u:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice
$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&-1&2\\1&-3&2&-13\end{pmatrix}.$$

1. Rappeler ce que cela signifie en explicitant u.
2. Déterminer le rang de u, ainsi que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$

Exercice 9 ●●● — Une matrice nilpotente Soit $A\in M_4(\mathbb{C})$ telle que
$$A^2\neq 0 \text{ et } A^3=0.$$
Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Justifier qu'il existe $x\in\mathbb{C}^4$ tel que $u^2(x)\neq 0$.
2. Montrer que $(u^2(x),u(x),x)$ est libre (classique).
3. Soit un vecteur $z\in\mathbb{R}^4$ tel que la famille $(u^2(x),u(x),x,z)$ est une base de $\mathbb{C}^4$. Justifier l'existence de z, et décrire la matrice de u dans cette base.
4. En déduire le rang de u.

Correction :
Méthode :

1. Se servir de l'hypothèse $A^2\neq 0$.
2. partir d'une combinaison linéaire nulle. Puisqu'on a des infos sur u^3, appliquer u.
3. Quel théorème fournit une base à partir d'une famille libre ? Ecrire la matrice est ensuite la clef de l'exo.
4. On lit le rang sur la matrice.

Détails :

1. Puisque $A^2\neq 0$, on a $u^2\neq 0$, donc il existe $x\in\mathbb{C}^4$ tel que $u^2(x)\neq 0$.
2. Soient (α,β,γ) tels que
$$\alpha u^2(x)+\beta u(x)+\gamma x=0.$$
On applique u :
$$u(\alpha u^2(x)+\beta u(x)+\gamma x)=u(0)=0$$
et donc par linéarité de u :
$$\alpha u^3(x)+\beta u^2(x)+\gamma u(x)=0,$$
or puisque $A^3=0$ on a $u^3=0$ et donc
$$\beta u^2(x)+\gamma u(x)=0.$$
On réapplique u et on obtient
$$\gamma u^2(x)=0$$
or $u^2(x)\neq 0$ d'où $\gamma=0$ et en remontant, $\beta=0$ puis $\alpha=0$. Cela prouve que la famille $(u^2(x),u(x),x)$ est libre.
3. On applique le théorème de la base incomplète à la famille libre $(u^2(x),u(x),x)$, on déduit l'existence de $z\in\mathbb{C}^4$ tel que $(u^2(x),u(x),x,z)$ est une base de $\mathbb{C}^4$. Il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ qui sont les composantes de $u(z)$ dans cette base.
Ecrivons la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$:
$$B=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0&a\\0&0&1&b\\0&0&0&c\\0&0&0&d\end{pmatrix}.$$
On peut obtenir que $d=0$. En effet, par produit de matrices triangulaires, le coefficient $(4,4)$ de B^3 est d^3, de plus $B^3=0$, car B est une matrice de u qui vérifie $u^3=0$. Donc on a $d^3=0$, d'où $d=0$.
En raisonnant de manière similaire sur le calcul de B^3, on peut trouver $c=0$, mais il y a plus naturel : on a par construction :
$$u(z)=au^2(x)+bu(x)+cx,$$

et en appliquant u deux fois, puisque $u^3 = 0$:

$$cu^2(x) = 0,$$

et donc puisque $u^2(x) \neq 0$, on a $c = 0$.

4. En appliquant la question précédente, on a $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Pour aller plus loin : Il est standard de montrer que des matrices nilpotentes (c'est-à-dire telles que $A^k = 0$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$) sont semblables à des matrices triangulaires de ce type. On peut raffiner la dernière colonne en essayant de construire le vecteur x dans $\operatorname{Im} u$ pour obtenir un dernière colonne sympathique, mais cela demande plus de travail.

Exercice 10 ••• Un endomorphisme nilpotent Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que $\dim(\ker(f)) = 2$ (on notera que $\operatorname{Im} f \subset \ker f$).

2. En déduire qu'il existe alors une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on pourra analyser la matrice pour construire la base).

3. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation $A^2 = 0$ d'inconnue $A \in M_3(\mathbb{R})$.

Exercice 11 ••• Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\ker(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

2. Déterminer une base de $\ker(f^2)$ et une base de $\ker((f - \mathrm{Id})^2)$. Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. Montrer qu'il existe, et expliciter, une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fera en sorte que les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ soient dans $\{-1, 0, 1\}$.

4. Déterminer la matrice de passage P depuis la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathcal{B}'$, ainsi que P^{-1}.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n puis A^n.

Correction :

Méthode :

1. Après échelonnement classique :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0, 0))$$

donc $\dim(\ker(f)) = 1$. Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = 3$. Or, l'image est engendrée par les colonnes de la matrice, et en notant que les deux premières sont proportionnelles :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, -1), (2, 1, 1, 1), (-2, -1, 0, 0)) \\ &= \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 1), (2, 1, 1, 1), (-2, -1, 0, 0)) \end{aligned}$$

Puisque cette famille de trois éléments est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$, qui est de dimension 3, c'en est une base.

2. La matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est A^2. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On déduit $\ker(f^2)$ comme ci-dessus :

$$\ker(f^2) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)).$$

On vérifie la propriéé $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, qui est vraie pour tout endomorphisme. C'est reparti pour du calcul pour $\ker((f - \mathrm{Id})^2)$. On peut ou bien former $A - I_4$ et le mettre au carré, ou bien profiter du calcul précédente via $(A - I_4)^2 = A^2 - 2A + I_4$. On trouve :

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle est déjà échelonnée, on en profite pour trouver le noyau rapidement :

$$\ker((f - \mathrm{Id})^2) = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$$

On verifie rapidement que $\ker(f^2) \cap \ker((f - \mathrm{Id})^2) = \{0\}$, par exemple en exploitant les équations trouvées après échelonnement, ou en raisonnement frontalement. Puisque $\dim(\ker(f^2)) + \dim(\ker((f - \mathrm{Id})^2)) = 2 + 2 = \dim(\mathbb{R}^4)$, alors ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. Analysons la matrice attendue : la première colonne est dans le noyau $\ker(A)$, et la troisième dans $\ker(A - I_4)$. Comment continuer ? On se doute que la question précédente va être utile. Notons : $e_1 = (1, 1, 0, 0)$ une base du noyau, si $e_2 \in \ker(f^2)$, on a $f(f(e_2)) = 0$, donc $f(e_2) \in \ker f$, et puisque $\ker(f)$ est de dimension 1, $f(e_2)$ sera proportionnel à e_1, ce qui correspond à la deuxième colonne.

   Concrètement, en prenant le vecteur trouvé ci-dessus dans $\ker(f^2)$, on trouve : $f((-1, 0, 1, 0)) = (1, 1, 0, 0) = e_1$, donc on pose $e_2 = (-1, 0, 1, 0)$, et la deuième colonne sera la bonne.

   Continuons : le troisème vecteur e_3 doit vérifier $f(e_3) = e_3$, c'est-à-dire $e_3 \in \ker(f - \mathrm{Id})$. Si on a bien compris, tout marchera pareil ? Si on ouvre les yeux, pas besoin d'échelonner $A - I_4$, car on voit vite que $(x, y, z, t) \in \ker(f - I_4) \implies x = y \text{ et } z = t$ puis après calculs on trouve

$$\ker(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((0, 0, 1, 1)).$$

   On pose donc $e_3 = (0, 0, 1, 1)$. Notez que ce vecteur est déjà apparu quand on a calculé $\ker((f - \mathrm{Id})^2)$, mais c'est une coïncidence. Il reste à trouver un dernier vecteur. Comme ci-dessus, on calcule :

$$f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 1) = (0, 0, 1, 1) + (1, 0, 0, 0)$$

   et donc en posant $e_4 = (1, 0, 0, 0)$, on a $f(e_4) = e_3 + e_4$. Ainsi, si on pose $\mathcal{B}' = (e_i)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est bien celle demandée.

4. On obtient la matrice de passage en rangeant les vecteurs de $\mathcal{B}'$ en colonne :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Après un pivot rapide :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Le calcul de T^n n'est pas si facile sans connaître le calcul par bloc. On décompose T en $T = D + N$, avec D diagonale et N nilpotente, et on espère que D et N commutent. Ouf, c'est le cas (mais est-ce un hasard ?). Sinon, le calcul par bloc marche très bien. Dans tous les cas, on trouve :

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2$$

   Finalement, on écrit $T = P^{-1}AP$ (formule de changement de base), puis d'après le cours :

$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

   On calcule ce produit et c'est fini.

Exercice 12 ●●○ — Un espace vectoriel de fonctions Introduisons les quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = x \cos x, \quad \text{et} \quad f_4(x) = x \sin x.$$

Soit E le sous-espace vectoriel des fonctions réelles définies par $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$. Soit u la fonction définie sur E par $u : f \mapsto f'$.

1. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E et en déduire sa dimension.
2. Montrer que u est un endomorphisme de E, et donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
3. Cette application est-elle un isomorphisme ?
4. Soit $f \in E$, dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2, -3, 4, 6)$. Calculer $u(f)$.
5. On cherche $g \in E$ telle que les coordonnées de $u(g)$ dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 2, 5, 8)$. Résoudre ce problème. Comment aurait-on fait sans l'aspect matriciel ?