

# Feuille d'exercices 22

## Matrices et applications linéaires

— **Exercice 1** ●○○ — **Applications linéaires de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$**  Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques associées.

1. La fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -2x + y)$ .
2. La fonction  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $u : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, 2x + y + 2z)$ .
3. La fonction  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $v : (x, y, z) \mapsto (y + 2z, z, x + y)$ .
4. Les fonctions  $2u - 3v$  et  $f \circ v$ . Et  $v \circ f$ ? (il y a un piège).

— **Exercice 2** ●○○ — **Changement de bases dans  $\mathbb{R}^3$**  Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , et  $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, 1, -1))$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Un élément de  $\mathbb{R}^3$  a pour coordonnées  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  dans  $\mathcal{B}'$ . Quelles sont ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ ? Et sa matrice dans  $\mathcal{B}$ ?
3. Un élément de  $\mathbb{R}^3$  a pour coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  dans  $\mathcal{B}$ . Quelles sont ses coordonnées dans  $\mathcal{B}'$ ? Et sa matrice dans  $\mathcal{B}'$ ?
4. Soit la fonction  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $u : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, 2x + y + 2z)$ . Donner sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ , puis dans la base  $\mathcal{B}'$  (on utilisera une matrice de passage).

— **Exercice 3** ●○○ — **Applications linéaires chez les polynômes** Déterminer la matrice des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques associées.

1. La fonction  $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$  définie par  $f : P \mapsto (X^2 - 1)P' - 6XP$ .
2. La fonction  $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  définie par  $u : P \mapsto P(X + 1) - P(X)$ .

— **Exercice 4** ●○○ — **Matrices dans différentes bases de polynômes** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $f : P \mapsto (X + 1)P' - P'(1)X^2$ . Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ , ainsi que les familles

$$\mathcal{B}' = (1, 1 + X, X + X^2) \text{ et } \mathcal{B}'' = (1 + X + X^2, 1 + X, 1 + X^2).$$

1. Vérifier que  $f$  définit bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ , et que  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  forment deux bases de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ .
3. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$  (on pourra utiliser des matrices de passage).
4. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$  (on pourra utiliser des matrices de passage).
5. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}(f)$  (on pourra utiliser des matrices de passage).

— **Exercice 5** ●●○ — **Changement de bases** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension 2 et 3. Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$  une base de  $F$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soient enfin

$$\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2) \text{ et } \mathcal{C}' = (f_1 + f_3, f_2 + f_3, f_3).$$

1. Vérifier que  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$  sont des bases respectives de  $E$  et  $F$ .
2. Soit  $x \in E$ , de coordonnées  $(x'_1, x'_2)$  dans  $\mathcal{B}'$ . Donner ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$ .
3. Soit  $x \in E$ , de coordonnées  $(x_1, x_2)$  dans  $\mathcal{B}$ . Donner ses coordonnées dans  $\mathcal{B}'$ .
4. Déterminer  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$ .

— **Exercice 6** ●●○ — **Système de suites, puissances et matrice diagonale** On considère trois suites réelles  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$  et  $(z_n)_{n \geq 0}$  vérifiant les relations

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ y_{n+1} = -2x_n - z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - 2y_n + z_n \end{cases}$$

1. Ecrire le problème sous forme matricielle à l'aide d'une matrice  $A$ .
2. Soit  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Vérifier que ces vecteurs forment une base de  $M_{3,1}(\mathbb{R})$ . Calculer  $Ae_i$  pour chacun des  $(e_i)_{i=1,2,3}$ , et déterminer  $P^{-1}AP$ , où  $P$  est la matrice dont les colonnes sont les  $(e_i)_{i=1,2,3}$ . On évitera d'effectuer le produit matriciel.

3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , en déduire  $A^n$ , puis une expression de  $X_n$  en fonction de  $(x_0, y_0, z_0)$ .
4. En déduire les termes généraux des suites  $(x_n)_{n \geq 0}$ ,  $(y_n)_{n \geq 0}$  et  $(z_n)_{n \geq 0}$ , et leurs comportements asymptotiques lorsque  $n \rightarrow +\infty$  (c'est-à-dire des équivalents simples).

— **Exercice 7** ●●○ — **Encore des polynômes** Soit la fonction,  $u$  définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $u : P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$ .

1. Vérifier que  $u$  définit bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Sans utiliser de matrices, déterminer  $\ker(u)$ . Que déduire pour  $u$  ?
3. Vérifier en utilisant la matrice de  $u$  dans la base canonique ce que vous avez trouvé pour  $\ker(u)$  et  $\text{Im } u$ .

— **Exercice 8** ●●○ — **Noyau et image d'une matrice** Soit  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -13 \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler ce que cela signifie en explicitant  $u$ .
2. Déterminer le rang de  $u$ , ainsi que  $\ker(u)$  et  $\text{Im}(u)$

— **Exercice 9** ●●● — **Une matrice nilpotente** Soit  $A \in M_4(\mathbb{C})$  telle que

$$A^2 \neq 0 \text{ et } A^3 = 0.$$

Soit  $u$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

1. Justifier qu'il existe  $x \in \mathbb{C}^4$  tel que  $u^2(x) \neq 0$ .
2. Montrer que  $(u^2(x), u(x), x)$  est libre (classique).
3. Soit un vecteur  $z \in \mathbb{R}^4$  tel que la famille  $(u^2(x), u(x), x, z)$  est une base de  $\mathbb{C}^4$ . Justifier l'existence de  $z$ , et décrire la matrice de  $u$  dans cette base.
4. En déduire le rang de  $u$ .

— **Exercice 10** ●●● — **Un endomorphisme nilpotent** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = 0$  et  $f \neq 0$ .

1. Montrer que  $\dim(\ker(f)) = 2$  (on notera que  $\text{Im } f \subset \ker f$ ).
2. En déduire qu'il existe alors une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (on pourra analyser la matrice pour construire la base).
3. Résoudre l'équation  $A^2 = 0$  d'inconnue  $A \in M_3(\mathbb{R})$ .

— **Exercice 11** ●●● — Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer  $\ker(f)$ ,  $\text{Im}(f)$  et  $\text{rg}(f)$ .
2. Déterminer une base de  $\ker(f^2)$  et une base de  $\ker((f - \text{Id})^2)$ . Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$ .
3. Montrer qu'il existe, et expliciter, une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^4$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fera en sorte que les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  soient dans  $\{-1, 0, 1\}$ .

4. Déterminer la matrice de passage  $P$  depuis la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^4$  vers  $\mathcal{B}'$ , ainsi que  $P^{-1}$ .
5. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $T^n$  puis  $A^n$ .

— **Exercice 12** ●●○ — **Un espace vectoriel de fonctions** Introduisons les quatre fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = x \cos x, \quad \text{et} \quad f_4(x) = x \sin x.$$

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel des fonctions réelles définies par  $E = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ . Soit  $u$  la fonction définie sur  $E$  par  $u : f \mapsto f'$ .

1. Vérifier que  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$  est une base de  $E$  et en déduire sa dimension.
2. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , et donner sa matrice dans la base  $\mathcal{B}$ .
3. Cette application est-elle un isomorphisme ?
4. Soit  $f \in E$ , dont les coordonnées dans  $\mathcal{B}$  sont  $(2, -3, 4, 6)$ . Calculer  $u(f)$ .
5. On cherche  $g \in E$  telle que les coordonnées de  $u(g)$  dans  $\mathcal{B}$  sont  $(1, 2, 5, 8)$ . Résoudre ce problème. Comment aurait-on fait sans l'aspect matriciel ?