Feuille d'exercices 19
Applications linéaires

Exercice 1 ●○○ **Noyau et image d'applications linéaires de $\mathbb{R}^3$** Soit la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u : (x, y, z) \mapsto (y - x, 2y + z - 3x, -y + 2x).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$. Que dire de u ?
3. Déterminer de même le noyau et l'image de la fonction

$$v : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, -2x + y + z, x - 2y + z)$$

Exercice 2 ●○○ **Applications linéaires, noyaux et rangs** Montrer que les applications suivantes, toutes notées u, sont linéaires, puis déterminer leur noyau, leur image et leur rang.

1. La fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ (on pourra admettre qu'elle est linéaire) définie par

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-3x_1 + 2x_2 + x_3, -4x_1 + x_3 + x_4, -x_1 - 2x_2 + x_4, 8x_2 + x_3 - 3x_4).$$

2. La fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto z + i\overline{z}$. Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
3. La fonction de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto XP'$.
4. La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P(X^2)$.
5. La fonction de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto X^2P' - 2XP$.
6. La fonction de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^T$.
7. La fonction de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto AM - MA$, où $A \in M_2(\mathbb{R})$ est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Les coefficients de A ont-ils joué pour la linéarité ?

Correction :

Méthode :

1. Clairement linéaire, assez pénible à montrer, on peut représenter la fonction par une matrice.
2.
3.
4. Ne pas se laisser berner par la présence de X^2. Pour le noyau : il est direct que $\ker f = \{0\}$. Pour l'image, on peut utiliser le transport d'une base canonique, ou voir que $P(X^2)$ est un polyôme pair.
5.
6. Assez direct.
7. La linéarité découle directement de la distributivité du produit matriciel. Pour le noyaux, résoudre un système.

Détails :

1. Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et on qu'on introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, alors on peut écrire

$$u : X \mapsto AX,$$

ce qui donne la linéarité de u. Notez qu'on assimile un élément de $\mathbb{R}^4$ et une matrice colonne $X \in M_{4,1}(\mathbb{R})$.
Le noyau se trouve en résolvant le système $f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$:

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0 \iff \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 8x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

On permute L1 et L3 puis on échelonne en x_1, on obtient :

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 8x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 8x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 8x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 8x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_3 = -8x_2 + 3x_4 \end{cases}$$

Notez que le système est de rang 2. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \ker(u) &= \{(-2x_2 + x_4, x_2, -8x_2 + 3x_4, x_4), (x_2, x_4) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_2(-2, 1, -8, 0) + x_4(1, 0, 3, 1), (x_2, x_4) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((-2, 1, -8, 0), (1, 0, 3, 1)). \end{aligned}$$

La famille $((-2,1,-8,0),(1,0,3,1))$ est clairement libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\ker(u)$.
D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker(u)) = 4-2 = 2$. Il suffit donc d'une famille libre de deux vecteurs pour avoir une base de $\mathrm{Im}(u)$. On l'obtient en transportant les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$(u(e_1), u(e_2)) = ((-3,-4,-1,0),(2,0,-2,8))$$

Ces deux vecteurs étant libres, ils forment une base de $\mathrm{Im}(u)$.
Notez que quand on transporte la base canonique pour ce type d'application, les vecteurs obtenus sont les colonnes de la matrice associée à l'application linéaire... suivre au chapitre dédié.

2.

3.

4. Il est direct que u est linéaire. De plus,

$$P \in \ker u \iff P(X^2) = 0 \iff P = 0$$

et donc $\ker u = \{0\}$.
L'image se trouve par transport de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$:

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(1), u(X), \dots, u(X^n)) = \mathrm{Vect}(1, X^2, \dots, X^{2n}).$$

La famille $(1, X^2, \dots, X^{2n})$ est clairement libre car de degrés échelonnés. C'est donc une base de $\mathrm{Im}\, u$, et donc la dimension de $\mathrm{Im}\, u$ est $n+1$ (ce qui est cohérent avec le théorème du rang). On peut noter que $\mathrm{Im}(u)$ est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ qui sont paires.

5. Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= X^2(\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) \\ &= X^2(\lambda P' + \mu Q') - 2X\lambda P - 2X\mu Q \\ &= \lambda(X^2P' - 2XP) + \mu(X^2Q' - 2XQ) = \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

Cela prouve que u est linéaire.
Pour trouver le noyau, on résout

$$u(P) = 0 \iff X^2P' - 2XP = 0 \iff XP' - 2P = 0.$$

En analysant le coefficient dominant a_n de P, on obtient $na_n - 2a_n = 0$ et donc $n = 2$. On cherche ainsi P sous la forme $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$, et on obtient

$$u(P) = 0 \iff 2a_2X^2 + a_1X - 2(a_2X^2 + a_1X + a_0) = 0$$

soit en identifiant les coefficients : $a_1 = a_0 = 0$. Finalement,

$$P \in \ker u \iff P = a_2X^2$$

et donc

$$\ker u = \mathrm{Vect}(X^2).$$

En particulier $\dim \ker u = 1$.
Notez qu'on aurait pu résoudre l'équation différentielle $x^2y' - 2xy = 0$ pour obtenir les éléments du noyau assez rapidement.
Pour trouver l'image, on peut transporter la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$:

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(1), u(X), \dots, u(X^n)).$$

Or on a

$$\forall k \in [\![0\,,n]\!]\,, \quad u(X^k) = (k-2)X^{k+1}.$$

Cela prouve que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(((k-2)X^{k+1})_{0 \leqslant k \leqslant n}) &= \mathrm{Vect}((X^{k+1})_{k \in [\![0,n+1]\!] \setminus \{2\}}) \\ &= \mathrm{Vect}(X, X^3, X^4, \dots, X^{n+1}). \end{aligned}$$

Ce sont les polynômes qui n'ont pas de terme en X^2 ni de constante. En partiulier, $\dim(\mathrm{Im}\, u) = n$, ce qui est cohérent avec le théorème du rang.

6.

7. Soient $(M,N) \in M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} u(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) \\ &= \lambda u(M) + \mu u(N) \end{aligned}$$

Cela prouve que u est linéaire.
Cherchons $\ker(u)$. On le fait frontalement en calculant le produit :

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(u) &\iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+4b & 2a+3b \\ c+4d & 2c+3d \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} -4b+2c = 0 \\ -2a-2b+2d = 0 \\ 4a+2c-4d = 0 \\ 4b-2c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut échelonner si on panique, mais il est tout aussi rapide d'exprimer c et d selon b avec L1 et L4 qui sont redondantes, et substituer dans L2 et L3, on obtient :

$$M \in \ker(u) \iff \begin{cases} d = a+b \\ c = 2b \end{cases},$$

d'où
$$\ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}).$$

Ainsi, une base de $\ker(u)$ est $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix})$, et $\dim(\ker(u)) = 2$. D'après le théorème du rang
$$\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(M_2(\mathbb{R}) - \dim(\ker(u)) = 4 - 2 = 2.$$

On déduit une base de $\mathrm{Im}(u)$ en transportant deux matrices de la base canonique de manière à obtenir une famille libre.

Exercice 3 •○○ — Applications linéaires définies par trois images

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que
$$u(0,1,1) = (0,1), \quad u(1,1,1) = (1,1) \ \text{ et } \ u(0,1,0) = (1,0).$$
2. Déterminer l'image par u d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

Correction :

1. Il suffit de vérifier que les trois vecteurs $f_1 = (0,1,1)$, $f_2 = (1,1,1)$ et $f_3 = (0,1,0)$, dont on connait les images, forment une base de $\mathbb{R}^3$. On peut montrer manuellement qu'ils forment une famille libre, mais on peut aussi calculer leur produit mixte :
$$[f_1, f_2, f_3] = (f_1 \wedge f_2) \cdot f_3 = 1 \neq 0,$$
ce qui prouve que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Une application linéaire étant définie de manière unique par ses images sur une base, cela répond à la question.
2. On va chercher à exprimer le vecteur (x,y,z) dans la base $\mathcal{B}'$. Pour cela, il suffit d'exprimer les vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la base canonique $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a
$$e_1 = f_2 - f_1, \quad e_2 = f_3 \ \text{ et } e_3 = f_1 - f_3.$$
Ainsi, on a
$$(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (-x+z)f_1 + xf_2 + (y-z)f_3.$$
On peut maintenant calculer, en utilisant la linéarité de f et les données des $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$:
$$u(x,y,z) = (-x+z)u(f_1) + xu(f_2) + (y-z)u(f_3) = (0, -x+z) + (x,x) + (y-z, 0)$$
$$= (x+y-z, z)$$
Remarque : On pouvait aussi utiliser le calcul matriciel si on a vu ce chapitre. On introduit pour cela la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, qui consiste à écrire les vecteurs (f_i) en colonne (puisque $\mathcal{B}$ est la base canonique) :
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On a en fait calculé son inverse lorsque l'on exprimé $\mathcal{B}$ en fonction de $\mathcal{B}'$:
$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors l'application linéaire est définie par les $u(f_i)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire par sa matrice dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$
On applique alors la formule de changement de base pour connaître la matrice de u dans les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = B = Q^{-1}AP,$$
avec $Q = I_3$ (on ne change pas la base d'arrivée) et $P = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ qui a été calculée. On obtient en faisant le produit
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On retrouve bien que $u(x,y,z) = (x+y-z, z)$.
Cette méthode semble plus longue, parceque vous débutez. En fait on pourrait faire un même changement de base pour plusieurs applications linéaires données dans $\mathcal{B}'$ (il suffit de calculer P), de plus elle ramène tout au simple calcul matriciel.
3. Standard

Exercice 4 •○○ — Application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et (f_1, f_2, f_3) celle de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telle que
$$u(e_1) = f_1 - f_3, \ \ u(e_2) = f_1 - f_2 + f_3, \ u(e_3) = 2f_1 + 2f_2 \ \text{et} \ \ u(e_4) = 3f_1 + 2f_2 - f_3.$$

2. Déterminer l'image d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ de coordonnées dans la base canonique (x_1, x_2, x_3, x_4) (Si on a acquis le calcul matriciel, on peut l'utiliser !).

3. Déterminer une base de $\ker(u)$. L'application est-elle injective ?

4. En déduire $\operatorname{Im}(u)$. L'application est-elle surjective ?

Exercice 5 ●●○ — Sommes directes (ou pas)

1. Soit u la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4).$$

A-t-on $\mathbb{R}^4 = \ker(u) \bigoplus \operatorname{Im}(u)$?

2. Soit v la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$v : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_1 - x_3, 4x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker(v) \bigoplus \operatorname{Im}(v)$?

Exercice 6 ●●○ — Fonctions somme des coordonnées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit u la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

1. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ? surjective ? Quel est son rang ?

2. Déterminer une base de $\ker(u)$.

Exercice 7 ●●○ — Image et noyau de la composée

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$:

1. Montrer que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.

2. Montrer que $\operatorname{Im}(u^2) \subset \operatorname{Im}(u)$.

3. Montrer que $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.

Correction :

Méthode :

1. Bien avoir en tête que $u^2 = u \circ u$. Que vaut $u(0)$ pour une application linéaire ?

2. Bien avoir en tête que $u^2 = u \circ u$.

3. Procéder par double implication. Pour la réciproque : quand on écrit $u(u(x)) = 0$, qui est à la fois dans $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$?

Détails :

1. Soit $x \in \ker u$, on a alors $u(x) = 0$, et donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$ car u est linéaire. On a donc $x \in \ker u^2$. Cela prouve $\ker u \subset \ker u^2$.

2. Soit $y \in \operatorname{Im} u^2$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u(u(x))$. Posons $x' = u(x)$, alors $y = u(x') \in \operatorname{Im} u$. Cela prouve $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.

3. On raisonne par double implication :

- Montrons que $\ker(u) = \ker(u^2) \implies \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$:
  Supposons $\ker(u) = \ker(u^2)$. Soit $y \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, car $y \in \operatorname{Im} u$. Or on a aussi $y \in \ker u$, donc $0 = u(y) = u(u(x)) = u^2(x)$, et donc $x \in \ker u^2$. Mais $\ker(u) = \ker(u^2)$, donc $x \in \ker u$, et $0 = u(x) = y$. Cela prouve que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.
- Montrons que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\} \implies \ker(u) = \ker(u^2)$:
  Supposons $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$. On sait déjà que $\ker u \subset \ker u^2$, on doit montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in \ker u^2$, c'est-à-dire $u(u(x)) = 0$. On pose $y = u(x)$, alors $u(y) = 0$ donc $y \in \ker u$, et on a aussi $y \in \operatorname{Im} u$ par définition de $\operatorname{Im} u$. Or $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$, d'où $y = 0$, c'est-à-dire $u(x) = 0$, et donc $x \in \ker u$. Cela prouve que $\ker u^2 \subset \ker u$ et donc que $\ker u^2 = \ker u$.

Exercice 8 ●○○ — Composée nulle

Soit E un espace vectoriel de dimension n, ainsi que u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $v \circ u = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subset \ker v$.

2. Quand la condition précédente est vérifiée, montrer que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \leqslant n$.

Correction :

Méthode :

1. Raisonner par double équivalence.

2. Commencer par déduire de l'inclusion $\operatorname{Im} u \subset \ker v$ une inégalité de dimension. Ensuite, quel théorème relie le rang et le noyau ?

Détails :

1. On raisonne par double implication :

- Montrons que $v \circ u = 0 \implies \operatorname{Im} u \subset \ker v$:
  Supposons $v \circ u = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On calcule $v(y)$: on a $v(y) = v(u(x)) = 0$ car $v \circ u = 0$, et donc $y \in \ker v$. Cela prouve que $\operatorname{Im} u \subset \ker v$.
- Montrons que $\operatorname{Im} u \subset \ker v \implies v \circ u = 0$:
  Supposons $\operatorname{Im} u \subset \ker v$. Soit $x \in E$, par définition, $u(x) \in \operatorname{Im} u$. Or $\operatorname{Im} u \subset \ker v$. Donc $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = 0$. Comme cela est vrai pour tout $x \in E$, alors $v \circ u = 0$. Cela prouve que $\operatorname{Im} u \subset \ker v \implies v \circ u = 0$.

2. L'inclusion $\operatorname{Im} u \subset \ker v$ donne :
$$\dim \operatorname{Im} u \leqslant \dim \ker v,$$
c'est-à-dire $\operatorname{rg} u \leqslant \dim \ker v$ or le théorème du rang donne $\dim \ker v = n - \operatorname{rg} v$, et donc
$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leqslant n.$$

Exercice 9 ••○ — Endomorphisme nilpotent Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$, et que n est minimal pour cette propriété (c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![0\,, n-1]\!]$, on a $u^k \neq 0$.

1. Dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'un tel endomorphisme pour $n = 2$.
2. On revient au cas général. Montrer que $\operatorname{Id} - u$ est bijective, et donner son inverse.

Correction :

1. Si on a déjà vu le lien avec les matrices, on peut prendre l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
En effet, cette matrice vérifie $N^2 = N$. L'endomorphisme associé est définie par
$$u((x, y)) = (y, 0).$$
2. On peut s'inspirer de la formule, pour un réel $x \neq 1$:
$$\frac{1 - x^n}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$
Ainsi, on pose
$$v = \sum_{k=0}^{n-1} u^k = \operatorname{Id} + u + \ldots + u^{n-1}.$$
On a alors, par telescopage :
$$v \circ (\operatorname{Id} - u) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k - \sum_{k=1}^{n} u^k = \operatorname{Id} - u^n.$$
Or par hypothèse, $u^n = 0$, cela prouve que
$$v \circ (\operatorname{Id} - u) = \operatorname{Id}.$$
Comme $\operatorname{Id} - u$ est un endomorphisme en dimension finie, cela prouve que $\operatorname{Id} - u$ est bijective, de fonction réciproque v.
Remarque : L'argument concernant la dimension finie utilise un théorème de cours subtil, à savoir qu'il suffit d'avoir une réciproque "à droite" ou "à gauche" pour être bijective. Si cet argument vous effraie, vous pouvez simplement dire qu'on a par un calcul analogue $(\operatorname{Id} - u) \circ v = \operatorname{Id}$.

Exercice 10 ••○ — Endomorphisme de polynômes Soit u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par
$$u(P) = (X^2 + 1)P''.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\operatorname{Im}(u)$. Précisez la dimension de ces sous-espace vectoriels.

Correction :

Méthode :

1. Standard, on vérifie que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ (parler du degré), et que u est linéaire.

Détails :

1. Vérifions que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_3[X]$. Déjà, $u(P) \in \mathbb{R}[X]$. Si $\deg P \leqslant 1$, alors $u(P) = 0$, sinon on a
$$\deg(u(P)) = 2 + \deg(P'') = \deg P$$
d'où $u(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Montrons que u est linéaire. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_3[X]$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a
$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (X^2 + 1)(\lambda P + \mu Q)'' \\ &= (X^2 + 1)(\lambda P'' + \mu Q'') \\ &= \lambda (X^2 + 1) P'' + \mu (X^2 + 1) \mu Q'' \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$
ce qui prouve que u est linéaire.
Ainsi, u est linéaire, de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$, c'est donc un endomorphisme.
2. Pour déterminer $\ker u$, on résout l'équation $u(P) = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Clairement
$$u(P) = 0 \iff P'' = 0 \iff P \in \mathbb{R}_1[X].$$
Ainsi, $\ker u = \mathbb{R}_1[X]$.
Pour déterminer $\operatorname{Im} u$, on peut se servir du fait que $\operatorname{Im} u$ est engendré par les images d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$:
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} u &= \operatorname{Vect}(u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)) = \operatorname{Vect}(2(X^2 + 1), 6X(X^2 + 1)) \\ &= \operatorname{Vect}(2X^2 + 2, 6X^3 + 6X) \end{aligned}$$
Il est clair que $(2X^2 + 2, 6X^3 + 6X)$ est une famille libre, car de degrés échellonnés, c'est donc une base de $\operatorname{Im} u$.
On vérifie que $\dim(\ker u) + \operatorname{rg} u = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, ce qui est cohérent avec le théorème du rang.

Exercice 11 ●●○ **Evaluation polynomiale en des points et interpolation**
Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ la donnée de $n+1$ points disctincts de $\mathbb{R}$. On définit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$u(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que u est linéaire et injective.
2. En déduire que :

$$\forall (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ \text{tel que } \forall k \in [\![0\,,n]\!]\,, \quad P(a_k) = b_k.$$

3. Ce polynôme P est appelé “polynôme interpolateur de degré n aux points (a_k, b_k). Cela vous rappelle-t-il quelque chose ? Si oui, explicitez-le en utilisant des polynômes L_i « déjà vus ».

Correction :
Méthode :
Détails :

1.
2.
3.

Exercice 12 ●●○ **Evaluation en deux points** Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^2$ défini par

$$u(P) = (P(2), P(3)).$$

1. On se place dans le cas $n = 1$. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$. La fonction fonction u est-elle injective, surjective, bijective ?
2. Même question pour $n = 2$.
3. Même question pour $n = 3$.
4. (Plus dur). On revient au cas $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Décrire $\ker(u)$.

Correction :
Méthode :

1. Un polynôme de degré 1 qui s'annule en deux points ?
2. Un polynôme de degré 2 qui s'annule en deux points ?
3. Un polynôme de degré 3 peut s'annuler en deux points, il a aors une troisième racine réelle.
4. Rappelez-vous : P s'annule en α si et seulement si... Quand on a deux racines, pensez à un critère de divisibilité pour justifier une factorisation.

Détails :

1. Soit $P \in \ker u$, alors $\deg P = 1$ et $P(2) = P(3) = 0$. Ainsi, P a plus de racines que son degré, d'où $P = 0$. Ansi, $\ker u = \{0\}$, et u est injective. Puisque $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, la fonction est aussi surjective, et $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^2$. On vient de retrouver : étant donné $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, par les deux points $(2, y_1)$ et $(3, y_3)$ passe un unique polynôme de degré au plus 1 (une droite).
2. Soit $P \in \ker u$, alors $\deg P = 2$ et $P(2) = P(3) = 0$. Ainsi, P est de la forme

$$P = \alpha(X-2)(X-3), \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\ker u = \mathrm{Vect}((X-2)(X-3))$, et $\dim(\ker u) = 1$. Pour l'image, on peut commencer par trouver sa dimension. Le théorème du rang donne

$$\dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\ker u) = 3 - 1 = 2.$$

Puisque $\mathrm{Im}\, u \subset \mathbb{R}^2$, on déduit que $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^2$.

3. On adapte la question précédente.
4. On fait appel au cours sur les polynômes :

$$P \in \ker u \iff P(2) = P(3) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \text{ tel que } P = (X-2)(X-3)Q$$

Notez la contrainte $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ qui vient du fait que $\deg P = n$. Ainsi, on a

$$\ker u = \{(X-2)(X-3)Q, \quad Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}$$

On écrivant $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$ on obtient

$$\ker u = \mathrm{Vect}((X-2)(X-3), (X-2)(X-3)X, \ldots, (X-2)(X-3)X^{n-2})$$

et on déduit une base de $\ker u$ puisque la famille ci-dessus est libre, car de degrés échelonnés. On a donc $\dim(\ker u) = n - 1$.
Pour les plus savants, on peut remarquer que la fonction $Q \mapsto (X-2)(X-3)Q$ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\ker u$.

Exercice 13 ●●○ **Endomorphisme avec la transposée** Soit $u : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$u(M) = M - M^T.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Quelle nom et notation a-t-on donné pour $\ker(u)$ dans le chapitre sur les matrices ?
3. Retrouver la dimension de $\ker(u)$, en donner une base. Faire de même pour $\mathrm{Im}(u)$.

Correction :

1. La fonction u étant clairement à valeurs dans $M_3(\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elle est linéaire. Pour M_1 et M_2 dans $M_3(\mathbb{R})$, et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\alpha M_1+\beta M_2) &= (\alpha M_1+\beta M_2)-(\alpha M_1+\beta M_2)^T \\ &= \alpha M_1+\beta M_2-(\alpha M_1^T+\beta M_2^T) \\ &= \alpha\left(M_1-M_1^T\right)+\beta\left(M_2-M_2^T\right) \\ &= \alpha u(M_1)+\beta u(M_2) \end{aligned}$$

ce qui prouve que u est linéaire, et donc que c'est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.

2. On a
$$M\in\ker u \iff u(M)=0 \iff M-M^T=0 \iff M=M^T.$$
En d'autre termes, M est dans $\ker u$ si et seulement si M est une matrice symétrique de $M_3(\mathbb{R})$.

3. La description des matrices symétriques a été vue dans le chapitre sur la dimension : l'ensemble des matrices symétriques de taille n est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, et donc ici c'est un sous-espace vectoriel de dimenson 6. Une base en est donné par la famille

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Pour trouver $\mathrm{Im}(u)$, on peut déterminer les images de la base canonique (E_{ij}) par u, pusique on sait que $\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}\left((E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ on trouve :

$$u(E_{11})=u(E_{22})=u(E_{33})=0,$$

tandis que

$$u(E_{12})=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=-u(E_{21}),$$

$$u(E_{13})=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=-u(E_{31})$$

et

$$u(E_{23})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=-u(E_{32})$$

Ainsi,
$$\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}(E_{12}-E_{21},E_{13}-E_{31},E_{23}-E_{32}).$$

On reconnait une base de l'ensemble des matrices antisymétriques, donc $\mathrm{rg}\,u=3$. ceci est en accord avec le théorème du rang :

$$\dim(\ker(u))+\mathrm{rg}(u)=6+3=9=\dim(M_3(\mathbb{R})).$$

Remarque : une solution qui ignore le fait qu'une base est transportée par u sur une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,u$, et qui passe facilement pour des matrices de taille n, est la suivante : on se donne $A\in M_3(\mathbb{R})$, et on cherche des conditions sur A pour que l'équation
$$A=u(M)$$
possède une solution $M\in M_3(\mathbb{R})$. Or

$$A=u(M)\iff A=M-M^T.$$

Il paraît logique de transposer cette équation :

$$A=u(M)\iff A^T=(M-M^T)^T=M^T-(M^T)^T=M^T-M.$$

En additionnant ces deux relations, on obtient

$$A+A^T=0,$$

c'est-à-dire que A est antimsymétrique. Réciproquement, si A est antisymétrique, on peut écrire
$$A=u(\frac{A}{2}),$$
ce qui prouve que $A\in\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 14 ••• Endomorphisme avec la dérivée : lien avec une équation différentielle Soit $u:\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\to\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$u:f\mapsto f''+f'-2f.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\ker u$ et sa dimension.

3. La fonction $x\mapsto\sin x$ appartient-elle à $\mathrm{Im}\,u$?

4. Déterminer $\ker(u)\cap\mathrm{Im}(u)$.