

Feuille d'exercices 20

Intégration

— **Exercice 1** ●○○ — **Vrai ou faux ?** Dire (en justifiant) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (les fonctions sont supposées continues).

- L'intégrale d'une fonction impaire est nulle.
- Si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.
- Si $f > 0$ sur $[0, 1[$ et $f < 0$ sur $]1, 100]$, alors $\int_0^{100} f < 0$.
- L'intégrale d'une fonction minorée par 1 est minorée par 1.
- L'intégrale d'une fonction qui ne s'annule qu'au deux extrémités de l'intervalle d'intégration n'est pas nulle.
- Si pour tout $x \in [-3, 3]$, on a $f(x) \leq x^3$, alors $\int_{-3}^3 f \leq 0$.
- Il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\int_0^1 f = f(c)$.
- Il existe $c \in [-1, 1]$ tel que $\int_{-1}^1 f = f(c)$.

— **Exercice 2** ●●○ — **LE classique : intégrales de Wallis** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$.

- Calculer I_0 et I_1 .
- Montrer que

$$\forall n \geq 0, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$
- Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, positive et décroissante.
- En déduire que la suite (I_n) converge.
- Montrer par une intégration par parties que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression explicite de I_{2p} et I_{2p+1} .
- Déduire également que

$$\forall n \geq 0, \quad \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

8. En déduire que $I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_n$.

9. Montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

10. Montrer que

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Correction :

Méthode :

Détails :

1. On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

2. Comment transformer un sinus en cosinus ? On effectue dans I_n le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ (et donc $u = \frac{\pi}{2} - t$) :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(\frac{\pi}{2} - u))^n (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n du.$$

3. On a

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad 0 \leq \sin t \leq 1$$

et donc en intégrant cette inégalité

$$0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2},$$

ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive et bornée.

Montrons la décroissance de la suite : soient $m \leq n$ deux entiers, on rappelle que si $x \in [0, 1]$, on a alors $x^n \leq x^m$. Ainsi on a

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

Cela prouve que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

4. La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, minorée par 0, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

5. On a

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \times (\sin t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)(\sin t)^n dt$$

$$= I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (\sin t)^n dt.$$

Le deuxième terme se calcule par intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (\sin t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos t}_u \times \underbrace{(\cos t \sin^n t)}_{v'} dt$$

$$= [\cos t \times \frac{\sin^{n+1} t}{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \frac{(\sin t)^{n+1}}{n+1} dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} dt = \frac{1}{n+1} I_{n+2}$$

Ainsi, on déduit

$$I_{n+2} = I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}$$

et on déduit la relation demandée rapidement.

6. Il est classique (vu en cours) que

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} I_0 \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} I_1,$$

les termes initiaux I_0 et I_1 ayant été déjà calculés.

7. Soit $n \geq 0$, la partie de droite découle directement de $0 < I_n \leq I_{n+1}$.

On déduit en combinant $I_{n+1} \geq I_{n+2}$ et **Q5** que

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

8. La question précédente et le théorème d'encadrement donnent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1,$$

ce qui est la définition de $I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_n$.

9. Découle directement de l'expression explicite (**Q6**).

10. Puisque $I_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} I_n$, on a d'après la question précédente, et par produit d'équivalents :

$$I_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{2n},$$

et on déduit le résultat en prenant la racine de cet équivalent, ce qui est licite.

Instant culture : Ces intégrales peuvent servir à montrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

formule étonnante car elle relie les nombres e, π , et la suite (entière) des factorielles.

— **Exercice 3** ●● — **Changements de variable, le retour** Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx$ (commencez par chercher une forme canonique).
- $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx$.
- $\int_{\frac{e^5}{3}}^{\frac{e^5\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{x(25+\ln^2(3x))} dx$ (la présence de $\frac{1}{x} dx$ fait penser à ...).

Correction :

Méthode :

Détails :

1. On commence par mettre le dénominateur sous forme canonique. On a

$$-x^2 + 4x + 5 = -(x^2 - 4x - 5) = -((x-2)^2 - 4 - 5) = 9 - (x-2)^2.$$

Notons I l'intégrale recherchée, on a alors

$$I = \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2} \frac{1}{\sqrt{9 - (x-2)^2}} dx = \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2} \frac{1}{3\sqrt{1 - \left(\frac{x-2}{3}\right)^2}} dx$$

Effectuons le changement de variable affine $u = \frac{x-2}{3}$, on trouve :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = [\text{Arcsin } u]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

2. Effectuons le changement de variable $u = \ln x$, dont la réciproque s'écrit $x = e^u$. On a alors

$$du = \frac{dx}{x} \iff dx = e^u du.$$

On effectue le changement de variable, sans oublier de modifier les bornes :

$$\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx = \int_0^\pi \sin u \times e^u du.$$

On cherche une primitive de $\sin u \times e^u$: pour un produit “trigo-expo”, on peut par exemple passer en complexe :

$$\sin u \times e^u = \operatorname{Im}(e^{iu})e^u = \operatorname{Im}(e^{iu}e^u) = \operatorname{Im}(e^{i(u+i)}) = \operatorname{Im}(e^{u(1+i)}).$$

Or

$$\begin{aligned} \int^x e^{u(1+i)} du &= \frac{1}{1+i} e^{x(1+i)} = \frac{1-i}{2} e^{ix} e^x \\ &= \frac{e^x}{2} (1-i)(\cos x + i \sin x) = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x + i(-\cos x + \sin x)), \end{aligned}$$

puis

$$\int^x \sin u \times e^u du = \int^x \operatorname{Im}(e^{iu}) \times e^u du = \operatorname{Im} \left(\int^x e^{iu} \times e^u du \right) = \frac{1}{2} (-\cos x + \sin x) e^x.$$

On peut conclure :

$$\int_0^\pi \sin u \times e^u du = \frac{1}{2} [(-\cos u + \sin u) e^u]_0^\pi = \frac{1}{2} (e^\pi + 1)$$

3. Effectuons le changement de variable $u = \ln(3x)$. On a $du = \frac{dx}{x}$. On effectue le changement de variable, sans oublier de modifier les bornes :

$$\int_{\frac{e^5}{3}}^{\frac{e^{5\sqrt{3}}}{3}} \frac{1}{x(25 + \ln^2(3x))} dx = \int_5^{5\sqrt{3}} \frac{1}{25 + u^2} du.$$

On rappelle (ou on redémontre en posant $u = at$) la formule

$$\int^y \frac{1}{u^2 + a^2} du = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{a}\right),$$

qui donne avec $a = 5$:

$$\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{1}{25 + u^2} du = \frac{1}{5} [\operatorname{Arctan} \frac{u}{5}]_5^{5\sqrt{3}} = \frac{1}{5} (\operatorname{Arctan} \sqrt{3} - \operatorname{Arctan} 1) = \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{60}.$$

— **Exercice 4** ●●○ — **Sommes de Riemann** Calculer les limites des quantités suivantes lorsque $n \rightarrow +\infty$:

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{n}$. 2. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$. 3. $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ (***, appliquer une fonction bien choisie).

Correction :

Méthode :

1. On reconnaît la somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})$ avec $f(t) = \sin(\pi t)$.
2. Utiliser des factorisations “forcées” par n ou n^2 pour faire apparaître une somme de Riemann.
3. Notons (p_n) la suite à étudier. Un quotient et des factorielles dans un exercice de sommes de Riemann ? Appliquons la fonction \ln à la suite.

Détails :

- 1.
- 2.
3. Notons (p_n) la suite à étudier. Un quotient et des factorielles dans un exercice de sommes de Riemann ? Appliquons la fonction \ln à la suite :

$$\ln(p_n) = \ln \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} (\ln(2n!) - \ln(n^n) - \ln(n!)).$$

Comment faire apparaître une somme ? On a

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k$$

et donc

$$\ln((2n)!) - \ln(n!) = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k).$$

En utilisant aussi $\ln(n^n) = n \ln n$, on obtient

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n \ln n \right).$$

Pour faire rentrer $n \ln n$ dans la somme, on note que cette somme comporte n termes, et donc

$$n \ln n = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln n,$$

donc

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln k - \ln n) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln \frac{k}{n}.$$

On pourrait faire apparaître deux somme de Riemann (de 1 à n et de 1 à $2n$) mais il est plus direct d'utiliser le glissement d'indice $k = n + p$:

$$\ln(p_n) = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln \frac{n+p}{n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \ln \left(1 + \frac{p}{n} \right).$$

On pose $f(x) = \ln(1+x)$, et on reconnaît une somme de Riemann associée à f sur l'intervalle $[0, 1]$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(p_n) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = \int_1^2 \ln(u) du = [u \ln u - u]_1^2 = 2 \ln 2 - 2 + 1 = 2 \ln 2 - 1.$$

Puisque $p_n = \exp(\ln(p_n))$ par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

— **Exercice 5** ●●○ — **Formule de la moyenne** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et $g \in \mathcal{C}^0([a, b])$, avec g de signe constant.

1. Montrer le résultat suivant :

$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Idée : Chercher à montrer que la fonction $t \mapsto \int_a^b f(x)g(x) dx - f(t) \int_a^b g(x) dx$ s'annule.

2. Etudier la limite de $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

3. Etudier la limite de $n^2 \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1+e^{-2t}}{t} dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Correction :

Méthode :

1. Commencer par écrire

$$\int_a^b f(x)g(x) dx - f(t) \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - f(t))g(x) dx.$$

Montrer ensuite cette quantité change de signe en “optimisant” $f(t)$ avec le théorème des bornes atteintes.

2. On peut appliquer le résultat précédent, ou le faire à la main. L'idée est que lorsque $x \rightarrow 0$, le facteur e^{-t} est proche de 1, et donc l'intégrale devrait se comporter comme $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$, qui se calcule. Pour le montrer, on utilise des inégalités pour contrôler e^{-t} sur l'intervalle $[x, 2x]$.

3. On procède comme à la question précédente, mais cette fois-ci c'est $\frac{1}{t}$ que l'on encadre.

Détails :

1. Introduisons la fonction

$$D : t \mapsto \int_a^b f(x)g(x) dx - f(t) \int_a^b g(x) dx$$

qui est définie et continue sur $[a, b]$. On doit montrer que D s'annule au moins une fois. Par linéarité, on a directement

$$\forall t \in [a, b], \quad D(t) = \int_a^b (f(x) - f(t))g(x) dx.$$

On va chercher à montrer que cette quantité change de signe en choisissant t tel que la fonction sous l'intégrale soit de signe constant.

Comme la fonction f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists (t_1, t_2) \in [a, b]^2, \quad \forall t \in [a, b], \quad f(t_1) \leq f(t) \leq f(t_2).$$

Puisque $g \geq 0$, on déduit :

$$\forall x \in [a, b], \quad (f(x) - f(t_1))g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad (f(x) - f(t_2))g(x) \leq 0.$$

D'où en intégrant :

$$D(t_1) \geq 0 \quad \text{et} \quad D(t_2) \leq 0.$$

Puisque D est continue, on peut appliquer le TVI : il existe $c \in [a, b]$ tel que $D(c) = 0$, ce qui donne l'égalité voulue.

2. On peut appliquer le résultat précédent, ou le faire “à la main”. Optons pour ce deuxième choix (les idées étant très proches).

On a par décroissance de $t \mapsto e^{-t}$:

$$\forall t \in [x, 2x], \quad e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x},$$

et donc puisque $\frac{1}{t} > 0$ sur l'intervalle $[x, 2x]$:

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{e^{-2x}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-x}}{t},$$

et donc en intégrant :

$$e^{-2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt.$$

Or on a

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2.$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, \quad \ln 2 \times e^{-2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \ln 2 \times e^{-x}.$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1,$$

on a d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln 2.$$

3. On a

$$\forall t \in [n^2, n^2 + 1], \quad \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n^2}$$

ce qui donne

$$\frac{n^2}{n^2 + 1} \int_{n^2}^{n^2+1} 1 + e^{-2t} dt \leq \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1 + e^{-2t}}{t} dt \leq \int_{n^2}^{n^2+1} 1 + e^{-2t} dt.$$

On conclut comme ci-dessus en calculant les intégrales et avec le théorème d'encadrement. Au final,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1 + e^{-2t}}{t} dt = 1.$$

— **Exercice 6** ●● — **Lemme de Riemann : un résultat important en série de Fourier** Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Montrer à l'aide d'une IPP que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(nt) f(t) dt = 0.$$

Instant culture : Ce résultat reste vrai pour une fonction continue (et même continue « par morceaux »), mais la preuve est moins directe. On vient en fait de montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction tendent vers 0.

Correction :

Méthode :

Comme suggéré, on fait une IPP. Puisque la fonction f est supposé \mathcal{C}^1 , on est invité à la dériver.

Détails :

Une IPP directe donne :

$$\forall n \geq 1, \quad \int_a^b \sin(nt) f(t) dt = \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) f(t) \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b \cos(nt) f'(t) dt$$

C'est bien sûr l'apparition du facteur $\frac{1}{n}$ qui fait tendre ces quantités vers 0. En effet, on a

$$\left| \frac{1}{n} \cos(na) f(a) \right| \leq \frac{|f(a)|}{n} \quad \text{et} \quad \left| \frac{1}{n} \cos(nb) f(b) \right| \leq \frac{|f(b)|}{n}$$

et donc par encadrement, le premier terme $\left[-\frac{1}{n} \cos(nt) f(t) \right]_a^b$ tend vers 0. Concernant l'intégrale, on doit contrôler f . Puisque la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$, on sait que f' y est continue, et elle est donc bornée :

$$\exists M > 0, \forall t \in [a, b], \quad |f'(t)| \leq M,$$

et donc

$$\left| \frac{1}{n} \int_a^b \cos(nt) f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_a^b |\cos(nt) f'(t)| dt \leq \frac{1}{n} \int_a^b M dt = \frac{M(b-a)}{n}.$$

Et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M(b-a)}{n} = 0$, on conclut par encadrement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_a^b \cos(nt) f'(t) dt = 0.$$

Finalement, les deux termes issus de l'IPP tendent bien vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

— **Exercice 7** ●● — **Bornes variables** Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)} dt$$

1. Montrer que f est impaire sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer f' .
3. Etudier les variations de $t \mapsto \frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)}$ et montrer que f est croissante sur \mathbb{R} .
4. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x$.

Correction :

Méthode :

1. Ecrire $f(-x)$, et faire le changement de variable $u = -t$ pour ramener les bornes entre x et $2x$.
2. Le plus clair est de faire intervenir $H(x) = \int_0^x \frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)} dt$ que l'on sait dériver.
3. Eviter au maximum les études de signe délicate. Se concentrer sur $[0, +\infty[$ puisque la fonction est impaire. Essayer de faire apparaître la fonction $x \mapsto \frac{\text{sh}(x^2)}{\text{ch}(x^2)}$ dans l'expression de f' .

4. L'idée est que la fonction $\frac{\text{sh}(x^2)}{\text{ch}(x^2)}$ sous l'intégrale tend vers 1, et que la largeur de l'intégrale est exactement x . Mais ceci n'est pas une preuve... On peut encadrer la fonction sous l'intégrale à coup de epsilon.

Détails :

1. On a

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)} dt.$$

Pour faire apparaître $f(x)$, on réalise le changement de variable $u = -t$:

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{\text{sh}((-u)^2)}{\text{ch}((-u)^2)} (-du) = - \int_x^{2x} \frac{\text{sh}(u^2)}{\text{ch}(u^2)} du = -f(x)$$

ce qui prouve que f est impaire.

2. On pose $H(x) = \int_0^x \frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)} dt$ La relation de Chasles donne

$$f(x) = \int_x^0 \frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)} dt + \int_0^{2x} \frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)} dt = H(2x) - H(x).$$

Or, la fonction H est dérivable sur \mathbb{R} , en tant que primitive, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = \frac{\text{sh}(x^2)}{\text{ch}(x^2)},$$

d'où par dérivée d'une somme et d'une composée, f est dérivable sur \mathbb{R} , et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2 \frac{\text{sh}(4x^2)}{\text{ch}(4x^2)} - \frac{\text{sh}(x^2)}{\text{ch}(x^2)}.$$

3. Le signe de l'expression précédente n'est pas clair. Etudions au préalable la fonction $h : x \mapsto \frac{\text{sh}(x^2)}{\text{ch}(x^2)}$. En posant $\text{th} = \frac{\text{sh}}{\text{ch}}$, on montre que

$$\text{th}' = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \frac{1}{\text{ch}^2} > 0,$$

ce qui prouve que cette fonction est croissante sur \mathbb{R} . La fonction h est alors croissante sur $[0, +\infty[$ comme composée. On a alors

$$f'(x) = \frac{\text{sh}(4x^2)}{\text{ch}(4x^2)} + \frac{\text{sh}(4x^2)}{\text{ch}(4x^2)} - \frac{\text{sh}(x^2)}{\text{ch}(x^2)} = h(2x) + h(2x) - h(x).$$

Puisque h est croissante, on a

$$\forall x \geq 0, \quad h(2x) - h(x) \geq 0,$$

et donc puisque $h \geq 0$ sur $[0, +\infty[$:

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) \geq 0,$$

ce qui prouve que f est croissante.

4. Il est directe en revenant aux expression de sh et ch que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(x^2)}{\text{ch}(x^2)} = 1.$$

Soit $\epsilon > 0$, en revenant à la définition de la limite on a :

$$\exists x_0 \in]0, +\infty[, \quad \forall t \geq x_0, \quad 1 - \epsilon \leq \frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)} \leq 1 + \epsilon,$$

et donc en intégrant entre x et $2x$, on a pour $x \geq x_0$:

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} (1 - \epsilon) dt &\leq f(x) \leq \int_x^{2x} (1 + \epsilon) dt \\ \Leftrightarrow x(1 - \epsilon) &\leq f(x) \leq x(1 + \epsilon) \\ \Leftrightarrow 1 - \epsilon &\leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \epsilon \end{aligned}$$

Finalement, on a montré :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0, \quad \forall x \geq x_0, \quad 1 - \epsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \epsilon.$$

C'est bien la preuve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et donc que $f(x) \sim x$.

Pour aller plus loin : La méthode employée pour la dernière question fonctionne si on remplace $\frac{\text{sh}(t^2)}{\text{ch}(t^2)}$ pour n'importe quelle fonction qui tend vers 1 (ou une limite $\ell \neq 0$) en $+\infty$.

— **Exercice 8** ●● — **Méthode des trapèzes** On suppose que $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. On considère une subdivision régulière $(x_j)_{j=0, \dots, n}$ de $[a, b]$, et on pose

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}.$$

On va montrer que T_n est bonne approximation de $\int_a^b f$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. (Approximation par une fonction affine).

a. Soient $\alpha < \beta$ quelconques, et g la fonction affine définie sur $[\alpha, \beta]$, qui relie les points $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$. Donnez son expression et calculez $\int_\alpha^\beta g$. Faites un dessin.

b. Montrer par une double intégration par parties que

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta) f''(x) dx.$$

- c. Calculer $\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(\beta-x) dx$ (on pourra poser $x = \alpha + (\beta-\alpha)u$ pour simplifier le calcul).
- d. En déduire que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) dx \right| \leq \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f''(t)|.$$

2. Etant donné le graphe de f , représenter les quantités $\int_a^b f(t) dt$ et T_n . Justifier le nom de la méthode.
3. Montrer que

$$\left| T_n - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \quad \text{avec } M_2 = \sup_{t \in [a, b]} |f''(t)|.$$

Correction :

Méthode :

1. (Approximation par une fonction affine).
- a. Surtout, ne pas y aller comme un bourrin. Quelle est la pente? La fonction g passe par $(\alpha, f(\alpha))$, s'inspirer de l'équation de la tangente. Pour l'intégrale, calculer l'aire d'un trapèze en découpant (le calcul de primitive fonctionne aussi à moins vaut l'éviter).
- b. SI on part de la gauche, la double ipp « naturelle » va faire apparaître x^2 et non pas $(x-\alpha)(x-\beta)$. Problématique. En fait, il faudrait primitiver 1 en autre chose que x . Mais... et si on partait de la fin? C'est plus direct et il y a moins de questions à se poser.
- c. Faire le changement de variable de manière standard.
- d. Se servir des questions précédentes : si on a fait juste, le terme $\int_{\alpha}^{\beta} g$ calculé en **Q1** est le terme de bord de la double ipp.
- 2.
3. On découpe en intervalle comme dans la méthodes des rectangles et on se sert des questions précédentes.

Détails :

1. (Approximation par une fonction affine).
- a. La pente est $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, et puisque la fonction g passe par $(\alpha, f(\alpha))$, son expression est :

$$g(x) = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} (x - \alpha).$$

Elle délimite un trapèze (faire un dessin), on calcule son aire (algébrique) en découpant en un rectangle et un triangle :

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = f(\alpha)(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}(f(\beta) - f(\alpha))(\beta - \alpha) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha).$$

- b. Partons du dernier terme et faisons une double ipp :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)f''(x) dx &= [(x-\alpha)(x-\beta)f'(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} ((x-\alpha) + (x-\beta))f'(x) dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (2x - \alpha - \beta)f'(x) dx \quad \text{car le terme de bord vaut 0} \\ &= -[(2x - \alpha - \beta)f(x)]_{\alpha}^{\beta} + 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad \text{en refaisant une ipp} \\ &= -(\beta - \alpha)(f(\beta) + f(\alpha)) + 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \end{aligned}$$

On déduit la formule demandée en isolant $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

- c. On effectue le changement de variable $x = \alpha + (\beta - \alpha)u$ (qui consiste à recentrer et à mettre à l'échelle, comme on va le voir dans les bornes). On a alors $u = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$, ce qui va permettre de calculer les bornes, tandis que $dx = (\beta - \alpha) du$. Notons aussi que

$$\begin{cases} x - \alpha = (\beta - \alpha)u \\ \beta - x = (\beta - \alpha)(1 - u) \end{cases}$$

Ainsi, l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(\beta-x) dx &= \int_0^1 (\beta-\alpha)u \times (\beta-\alpha)(1-u)(\beta-\alpha) du \\ &= (\beta-\alpha)^3 \int_0^1 u(1-u) du = (\beta-\alpha)^3 \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}. \end{aligned}$$

- d. On a

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) \quad \text{d'après Q1a} \end{aligned}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)f''(x) dx \quad \text{d'après Q1b}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) - g(x) dx \right| &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |(x - \alpha)(x - \beta)f''(x)| dx \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x)|f''(x)| dx \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sup_{[\alpha, \beta]} |f''(t)| \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) dx \\ &= \sup_{[\alpha, \beta]} |f''(t)| \times \frac{(\beta - \alpha)^3}{12} \quad \text{d'après Q1c} \end{aligned}$$

2.

3.

— **Exercice 9** ●●○ — **Aire d'une ellipse** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et soit \mathcal{E} le sous-ensemble du plan défini par

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

1. Représenter schématiquement l'ensemble \mathcal{E} . On pourra commencer par le dessiner à l'aide du changement d'échelle $(X, Y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$.
2. Calculer l'aire délimitée par \mathcal{E} dans le quart de plan supérieur droit $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. On pourra exprimer y en fonction de x dans $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, ou utiliser une intégrale double et des coordonnées polaires, comme en SI.
3. En déduire l'aire totale délimitée par \mathcal{E} . Est-ce cohérent avec le cas $a = b = 1$. Auriez-vous pu trouver le résultat « à la main » par des changement d'échelle ?

— **Exercice 10** ●●○ — **Inégalité par une formule de Taylor** Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$