Feuille d'exercices 20
Intégration

Exercice 1 ●○○ — Vrai ou faux ? Dire (en justifiant) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (les fonctions sont supposées continues).

1. L'intégrale d'une fonction impaire est nulle.
2. Si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.
3. Si $f > 0$ sur $[0, 1[$ et $f < 0$ sur $]1, 100]$, alors $\int_0^{100} f < 0$.
4. L'intégrale d'une fonction minorée par 1 est minorée par 1.
5. L'intégrale d'une fonction qui ne s'annulent qu'au deux extrémités de l'intervale d'intégration n'est pas nulle.
6. Si pour tout $x \in [-3, 3]$, on a $f(x) \leqslant x^3$, alors $\int_{-3}^3 f \leqslant 0$.
7. Il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\int_0^1 f = f(c)$.
8. Il existe $c \in [-1, 1]$ tel que $\int_{-1}^1 f = f(c)$.

Exercice 2 ●●○ — LE classique : intégrales de Wallis Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que
$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, positive et décroissante.
4. En déduire que la suite (I_n) converge.
5. Montrer par une intégration par parties que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression explicite de I_{2p} et I_{2p+1}.
7. Déduire également que
$$\forall n \geqslant 0, \quad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$
8. En déduire que $I_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} I_n$.
9. Montre que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
10. Montrer que
$$I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 3 ●●○ — Changements de variable, le retour Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}+2} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}} \,\mathrm{d}x$ (commencez par chercher une forme canonique).
2. $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) \,\mathrm{d}x$.
3. $\int_{\frac{e^5}{3}}^{\frac{e^{5\sqrt{3}}}{3}} \frac{1}{x(25+\ln^2(3x))} \,\mathrm{d}x$ (la présence de $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ fait penser à ...).

Exercice 4 ●●○ — Sommes de Riemann Calculer les limites des quantités suivantes lorsque $n \to +\infty$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{n}$. 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2+k^2}$. 3. $\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ (***, appliquer une fonction bien choisie).

Exercice 5 ●●○ — Formule de la moyenne Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$ et $g \in \mathscr{C}^0([a, b])$, avec g de signe constant.

1. Montrer le résultat suivant :
$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x.$$
<u>**Idée**</u> : Chercher à montrer que la fonction $t \mapsto \int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x - f(t) \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x$ s'annule.
2. Etudier la limite de $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to 0^+$.
3. Etudier la limite de $n^2 \int_{n^2}^{n^2+1} \frac{1+e^{-2t}}{t} \,\mathrm{d}t$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 6 ●●○ — Lemme de Riemann : un résultat important en série de Fourier Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Montrer à l'aide d'une IPP que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

__Instant culture__ : Ce résultat reste vrai pour une fonction continue (et même continue « par morceaux »), mais la preuve est moins directe. On vient en fait de montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction tendent vers 0.

Exercice 7 ●●○ — Bornes variables Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}(t^2)}{\mathrm{ch}(t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
3. Etudier les variations de $t \mapsto \frac{\mathrm{sh}(t^2)}{\mathrm{ch}(t^2)}$ et montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$.

Exercice 8 ●●● — Méthode des trapèzes On suppose que $f \in \mathscr{C}^2([a,b])$. On considère une subdivision régulière $(x_j)_{j=0,\dots,n}$ de $[a,b]$, et on pose

$$T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^n \frac{f(x_{j-1})+f(x_j)}{2}.$$

On va montrer que T_n est bonne approximation de $\int_a^b f$ lorsque $n \to +\infty$.

1. (Approximation par une fonction affine).
   - **a.** Soient $\alpha < \beta$ quelconques, et g la fonction affine définie sur $[\alpha,\beta]$, qui relie les points $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$. Donnez son expression et calculez $\int_\alpha^\beta g$. Faites un dessin.
   - **b.** Montrer par une double intégration par parties que

   $$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

   - **c.** Calculer $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra poser $x = \alpha + (\beta-\alpha)u$ pour simplifier le calcul).
   - **d.** En déduire que

   $$\left|\int_\alpha^\beta f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}\sup_{t\in[\alpha,\beta]}|f''(t)|.$$

2. Etant donné le graphe de f, représenter les quantités $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et T_n. Justifier le nom de la méthode.
3. Montrer que

$$\left|T_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \quad \text{avec} \quad M_2 = \sup_{t\in[a,b]}|f''(t)|.$$

Exercice 9 ●●○ — Aire d'une ellipse Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, et soit $\mathcal{E}$ le sous-enemble du plan défini par

$$\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

1. Représenter schématiquement l'ensemble $\mathcal{E}$. On pourra commencer par le dessiner à l'aide du changement d'échelle $(X,Y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$.
2. Calculer l'aire délimitée par $\mathcal{E}$ dans le quart de plan supérieur droit $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. On pourra exprimer y en fonction de x dans $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, ou utiliser une intégrale double et des coordonnées polaires, comme en SI.
3. En déduire l'aire totale délimitée par $\mathcal{E}$. Est-ce cohérent avec le cas $a = b = 1$. Auriez-vous pu trouver le résultat « à la main » par des changement d'échelle ?

Exercice 10 ●●○ — Inégalité par une formule de Taylor Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$