Feuille d'exercices 1
Premiers outils mathématiques

1 Superposition de signaux

Exercice 1 ●○○ Somme de deux sinusoïdes

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

1. Trouver $r > 0$ et $\phi \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = r\cos(x - \phi).$$

2. Quelle est la valeur maximale de la fonction ? Quand est-elle atteinte ? Esquisser son graphe.

3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b. Quelles sont les solutions qui sont dans l'intervalle $[-4\pi, 3\pi]$?

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin(3x) + \cos(3x) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Correction :

Méthode

1. C'est un résultat de cours, on peut balancer les formules, ou mieux encore factoriser par r et conclure avec une formule d'addition.

2. Dans la forme initiale de f, cos et sin se battent en duel. Se servir de la question précédente : quand la fonction cos est-elle maximale ?

3. **a.** Même stratégie.

b. Mettre la question en forme avec des inégalités, ou le faire à la main.

4. On peut mentalement "poser" $X = 3x$, mais attention aux congruences. La notation "avec $2k\pi$" permet d'éviter les confusions.

Détails :

1. On sait que r est donné par $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $(a, b) = (1, 1)$ les coefficients devant cos et sin, et donc ici $r = \sqrt{2}$. On met r en facteur : :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x + \sin x &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)\end{aligned}$$

On reconnait une formule d'addition : $\cos x\cos\phi + \sin x\sin\phi = \cos(x - \phi)$, avec $\phi = \frac{\pi}{4}$, et on obtient :

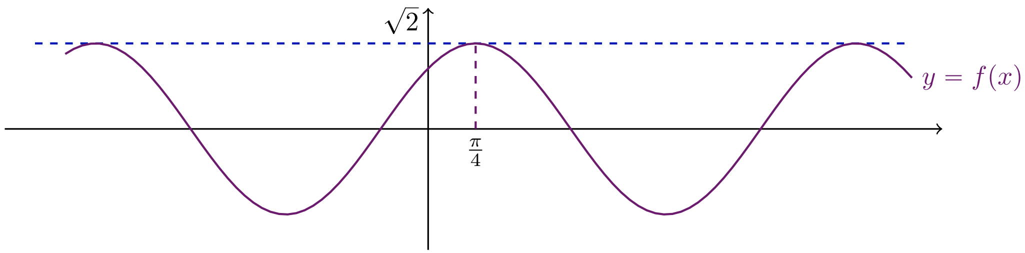
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

A noter : on pouvait aussi "balancer" les formules.

2. On a pour $t \in \mathbb{R}$ que $\cos t \leqslant 1$, avec égalité si et seulement si $t \equiv 0 \quad [2\pi]$, c'est-à-dire lorsque $t = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, avec la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{2} \iff x - \frac{\pi}{4} \equiv 0 \;\; [2\pi] \iff x \in \{2k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ainsi, le maximum de la fonction vaut $\sqrt{2}$, ce qui était dur à anticiper, et les valeurs où ce maximum est atteint sont "déphasées" de $\frac{\pi}{4}$ par rapport aux maximum du cosinus. Notez que le facteur $\sqrt{2}$ est un facteur de "dilatation" selon l'axe des ordonnées.



Ci-dessus : le graphe de $f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$. Pour l'obtenir, on part du graphe de cosinus, que l'on translate de $\frac{\pi}{4}$ à droite selon les abscisses, et que l'on dilate d'un facteur $\sqrt{2}$ selon les ordonnées.

3. **a.** On utilise la question **Q1** :

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{6}}{2} &\iff \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ &\iff \cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff x-\frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x-\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{6} \ [2\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{5\pi}{12} \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{12} \ [2\pi] \end{aligned}$$

On peut écrire l'ensemble des solutions sous la forme

$$\mathcal{S} = \{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\bigcup\{\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

b. Le plus efficace est de raisonner analytiquement. On utilise la forme trouvée à la question précédente. On a

$$-4\pi \leqslant \frac{5\pi}{12}+2k\pi \leqslant 3\pi \iff \frac{-53\pi}{12} \leqslant 2k\pi \leqslant \frac{31\pi}{12} \iff -\frac{53}{24} \leqslant k \leqslant \frac{31}{24}.$$

N'oublions pas que k est entier, ainsi, on obtient

$$-4\pi \leqslant \frac{5\pi}{12}+2k\pi \leqslant 3\pi \iff k\in\{-2,-1,0,1\}$$

ce qui donne comme valeurs associées :

$$\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cap[-4\pi,3\pi] = \{-\frac{43\pi}{12},-\frac{19\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{29\pi}{12}\}.$$

On montre de même que

$$\{\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cap[-4\pi,3\pi] = \{-\frac{47\pi}{12},-\frac{23\pi}{12},\frac{\pi}{12},\frac{25\pi}{12}\}.$$

4. On utilise la question précédente :

$$\begin{aligned} \sin(3x)+\cos(3x) = \frac{\sqrt{6}}{2} &\iff 3x = \frac{5\pi}{12}+2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = \frac{\pi}{12}+2k\pi, \quad \text{avec } k\in\mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{5\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

A retenir : La question **Q1** est la clef sans laquelle l'exo est infaisable. Soyez prévenu : on risque de ne pas vous donner cette question, et ce sera à vous de transformer tout(e) seul(e) la fonction (ou l'équation).

Pour aller plus loin : La fonction f apparaît naturellement lorsqu'on étudie une fonction du type $g : x \mapsto \cos x \times e^{-x}$, typique des régime sinusoïdaux amortis en physique. Les maximums locaux de cette fonction se trouve en calculant la dérivée :

$$g'(x) = -(\cos x + \sin x)e^{-x} = -f(x)e^{-x},$$

et la fonction f apparaît. Le déphasage de $\frac{\pi}{4}$ dans les variations de g par rapport aux variations du cosinus est connu en physique.

Exercice 2 ●●● — Avec une inégalité

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos(2t)+\sin(2t) = -1,$$

2. Résoudre dans $[0,2\pi]$:

$$\sqrt{3}\cos(2t)+\sin(2t) \leqslant -1,$$

Exercice 3 ●●○ — Différentes amplitudes

1. On considère les deux signaux

$$S_1(t) = 3\cos(4t+\frac{7\pi}{6}) \quad \text{et} \quad S_2(t) = -\sqrt{3}\sin(4t+\frac{7\pi}{6}).$$

Mettre leur somme S sous la forme $A\cos(\omega t+\varphi)$, en précisant les valeurs de ω, A et φ.

2. On superpose (c'est-à-dire qu'on ajoute) les deux signaux

$$S_1(t) = a\cos(3t+\varphi) \quad \text{et} \quad S_2(t) = 2\sqrt{3}\sin(3t+\frac{2\pi}{3}),$$

où a et φ sont inconnus. On obtient le signal S, que l'on mesure. On trouve que S vaut

$$S(t) = 4\cos(3t+\frac{\pi}{3}).$$

Déterminer les valeurs possibles pour l'amplitude a et la phase φ du signal S_1.

Correction :

1. On cherche $r>0$ et $\phi\in\mathbb{R}$ tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = r\cos(x-\phi).$$

D'après le cours, r est donné par $r = \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{12}$, tandis que ϕ vérifie

$$\cos\phi = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\phi = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{2}.$$

On déduit que $\phi \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{12}\cos(x + \frac{\pi}{6}).$$

En particulier, pour $t \in \mathbb{R}$, on évalue cette identité avec $x = 4t + \frac{7\pi}{6}$, et on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 3\cos(4t+\frac{7\pi}{6})-\sqrt{3}\sin(4t+\frac{7\pi}{6}) = \sqrt{12}\cos(4t+\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{6}) = \sqrt{12}\cos(4t+\frac{4\pi}{3}).$$

On déduit la forme voulue avec $A = \sqrt{12}$, $\omega = 4$ et $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

2. On ne peut pas appliquer le cours, car la somme $S_1 + S_2$ n'est pas de la forme $a\cos + b\sin$, puisque les arguments dans les fonctions trigonométriques sont différents. On peut néanmoins s'inspirer de la méthode du cours pour transformer $S_1 + S_2$. Le plus direct (mais calculatoire) est de développer S_1 et S_2 avec les formules d'addition, ce qui donne, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S_1(t) + S_2(t) &= a\cos\varphi\cos 3t - a\sin\varphi\sin 3t + 2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}\cos 3t + 2\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{3}\sin 3t. \\ &= \big(a\cos\varphi + 3\big)\cos 3t + \big(-a\sin\varphi - \sqrt{3}\big)\sin 3t \end{aligned}$$

D'un autre côté, on développe également S :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad S(t) &= 4\cos\frac{\pi}{3}\cos 3t - 4\sin\frac{\pi}{3}\sin 3t \\ &= 2\cos 3t - 2\sqrt{3}\sin 3t. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $S_1 + S_2 = S$ lorsque

$$\begin{cases} a\cos\varphi + 3 = 2 \\ -a\sin\varphi - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a\cos\varphi = -1 \\ a\sin\varphi = \sqrt{3} \end{cases}$$

Attention, à ce stade du raisonnement, ce système n'est pas une implication mais une condition suffisante, puisqu'on s'est contenté d'égaliser les facteurs devant $\cos 3t$ et $\sin 3t$! Puisque l'énoncé demande de trouver les valeurs possibles (sous-entendu : toutes les valeurs possibles), il faut s'assurer que ces conditions sur (a, φ) sont aussi nécessaires. Pour cela, on évalue l'égalité $S_1 t) + S_2(t) = S(t)$ en $t = 0$ ce qui implique la première ligne du système, puis en $t = \frac{\pi}{6}$, de sorte que $3t = \frac{\pi}{2}$, ce qui implique la seconde.

Résolvons maintenant le système. Si a et φ sont solutions de ce système, alors on a, en faisant $(L1)^2 + (L2)^2$:

$$a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi = (-1)^2 + \sqrt{3}^2 = 4,$$

ce qui équivaut à $a^2 = 4$, et donc $a = 2$ ou $a = -2$. Pour chacun de ces deux cas, on déduit φ :

- Lorsque $a = 2$, on a
$$\begin{cases} \cos\varphi = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
et donc $\varphi \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.
- Lorsque $a = -2$, on obtient de même $\varphi \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Réciproquement, il est évident que ces valeurs de a et φ résolvent le système ci-dessus.

En conclusion :

$$\begin{aligned} & S_1 + S_2 = S \\ \iff & \begin{cases} a\cos\varphi = -1 \\ a\sin\varphi = \sqrt{3} \end{cases} \\ \iff & \left(a = 2 \text{ et } \varphi \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]\right) \text{ ou } \left(a = -2 \text{ et } \varphi \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]\right) \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter qu'en physique, on considère souvent des amplitudes positives, mais qu'une amplitude négative peut être considérée quitte à déphaser de π, ce qui correspond à la formule $\cos x = -\cos(x + \pi)$.

A retenir : On a exploité les techniques de cours autour des transformations de sinusoïdes, en particulier, les formules d'additions, suivi de l'identification des facteurs devant les fonctions sin et cos. Ensuite, pour trouver l'amplitude, il est standard d'essayer de l'isoler en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

2 Composées de fonctions

Exercice 4 •∘∘ — Déterminer des composées

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants, en précisant dans chaque cas l'ensemble de définition des fonctions données ainsi que des fonctions construites :

1. $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
3. $f(x) = x^3 + 1$ et $g(x) = \ln(x)$ (on étudiera au préalable la fonction f).

Exercice 5 •∘∘ — Dériver des composées

Pour chacunes des fonctions h ci-dessous, donner l'ensemble de définition puis calculer leurs dérivées. On pourra commencer par écrire h sous la forme $g \circ f$, en précisant les fonctions g et f :

1. $h : x \mapsto 5e^{7-3x^2}$
2. $h : x \mapsto \sqrt{x^2-3}$.
3. $h : x \mapsto \frac{1}{x^3+1}$.

Correction :

1. Cette question est assez simple car il n'y a pas de problématique avec l'ensemble de définition. On introduit les fonctions f et g, toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$, par
$$f(x) = 7-3x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 5e^x.$$
On a alors $h = g \circ f$, qui est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = -6x \times 5e^{7-3x^2} = -30e^{7-3x^2}.$$
On retrouve la formule du lycée : si $u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors
$$(e^u)' = u'e^u.$$

2. On pose $g(x) = \sqrt{x}$, défini sur $D_g = [0, +\infty[$. Trouvons les valeurs "autorisées" pour définir $x \mapsto \sqrt{x^2-3}$: il s'agit des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 - 3 \geqslant 0$. Le polynôme $x \mapsto x^2-3$ est du signe du coefficient dominant (positif) sauf entre ses racines $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Ainsi, on pose $I =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$, et on a
$$\forall x \in I, \quad x^2-3 \geqslant 0.$$
On introduit $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2-3$, et on peut alors écrire $h = g \circ f$. Afin de dériver h, on note que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est dérivable que sur $]0, +\infty[$. On doit donc modifier la solution précédente en définissant f sur un ensemble J tel que pour tout x dans J, on a $f(x) > 0$. Pour cela, on pose $J =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, et la fonction $g \circ f$ est bien définie et dérivable sur J, avec
$$\forall x \in J, \quad h'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2-3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}.$$
On voit dans la formule l'importance d'avoir $x^2-3 > 0$ et pas seulement $x^2-3 \geqslant 0$.
On retrouve la formule du lycée : si $u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et à valeurs strictement positives, alors
$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Remarque : La correction ci-dessus élude le vocabulaire ensembliste. On peut dans un premier temps raisonner sur la notion de "valeurs autorisées" (ou "interdites"). Une correction plus poussée serait de dire que l'on veut définir f par $f(x) = x^2-3$, sur un domaine de définition I tel que $f(I) \subset D_g$ ce qui traduit $\forall x \in I, \ x^2-3 \geqslant 0$.

3. Introduisons la fonction $g = \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x}$.
Trouvons les valeurs "autorisées" pour définir $x \mapsto \frac{1}{x^3+1}$: il s'agit des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^3+1 \neq 0$. Or la fonction $x \mapsto x^3+1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle s'annule donc au plus une fois, et comme elle s'annule en -1, on a donc
$$x^3+1 = 0 \iff x = -1.$$
Ainsi, si on pose $I = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, et qu'on introduit la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3+1$, on a bien
$$\forall x \in I, \quad f(x) \neq 0,$$
ce qui permet de définir $g \circ f : I \to \mathbb{R}$, qui vérifie bien
$$\forall x \in I, \quad g \circ f(x) = \frac{1}{x^3+1} = h(x).$$
On déduit, puisque $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, que
$$\forall x \in I, \quad h'(x) = f'(x) \times (g' \circ f)(x) = 3x^2 \times (-\frac{1}{f(x)^2}) = -\frac{3x^2}{(x^3+1)^3}.$$
On retrouve la formule du lycée : si $u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et à valeurs non nulle, alors
$$(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}.$$

3 Intégrations par parties

Exercice 6 ●●○ — Quelques intégrations par parties

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(2t) \, \mathrm{d}t$.
2. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$.
3. A l'aide d'un double intégration par parties, déterminer $\int_0^1 \cos(2t) e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Correction :
Méthode
Dans chaque cas on cherche à utiliser une (ou des) IPP. Il faut choisir quelle fonction on dérive et quelle fonction on primitive. Il est nécessaire de se projeter mentalement sur ce que va donner l'IPP pour faire ce choix, afin d'aboutir à quelue chose qui se calcule.

1. C'est standard : on applique une IPP en "dérivant t", (et donc donc en "primitivant" $\sin t$) ce qui va bien conduire à une intégrale plus simple.
2. Ici il vaut mieux tester les deux choix, en effet, le plus efficace n'est pas celui qu'on aurait choisi au premier coup d'oeil ! D'autant plus que primitiver ln n'est pas direct...
3. Après une première IPP, on tombe sur une intégrale similaire. Une deuxième fait rapparaître la première intégrale. Mais a-t-on vraiment tourné en rond ?

Détails :

1. On pose $v(t) = t$ et $u'(t) = \sin(2t)$, de sorte que
$$\begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2}\cos(2t) \quad \text{et} \quad u'(t) = \sin(2t) \\ v(t) = t \quad \text{et} \quad v'(t) = 1 \end{cases}$$
On applique la formule d'intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} t\sin(2t)\,\mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t\times(-\frac{1}{2}\cos(2t))]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi}{4}\cos(\pi) + \frac{1}{2}\times 0\times\cos(0) + \frac{1}{2}\times[\frac{1}{2}\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\times 0 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$
2. On pose $v(x) = \ln(x)$ et $u'(x) = x$, de sorte que $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v(x) = \frac{1}{x}$. On applique la formule d'intégration par parties pour les primitives
$$\begin{aligned}\int^x t\ln t\,\mathrm{d}t &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int^x \frac{t^2}{2}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\end{aligned}$$
On rappelle que pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée, la notation $\int f$ désigne « une primitive de f » (sans variable) tandis que que la notation $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne « une primitive de f évaluée en un réel x ». La notation $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est légèrement ambigüe, car la variable x n'a pas le même rôle muet que dans une intégrale.
3. Notons I l'intégrale à calculer. Une première intégration par parties (que nous ne détaillons pas) fournit, en dérivant $t \mapsto \cos(2t)$ et en primitivant $t \mapsto e^{-t}$:
$$I = [-\cos(2t)e^{-t}]_0^1 - \int_0^1 (-2\sin(2t))(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = [-\cos(2t)e^{-t}]_0^1 - 2\int_0^1 \sin(2t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
On applique une deuxième intégration par partie à la nouvelle intégrale (en prenant soin de dériver $t \mapsto \sin(2t)$ et de primitiver $t \mapsto e^{-t}$, puisque l'autre choix reviendrait à revenir en arrière) :
$$\int_0^1 \sin(2t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\sin(2t)e^{-t}]_0^1 - \int_0^1 2\cos(2t)(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = [-\sin(2t)e^{-t}]_0^1 + 2I.$$
En mettant bout à bout ces deux égalités, on obtient :
$$\begin{aligned} & I = [-\cos(2t)e^{-t}]_0^1 - 2\left([-\sin(2t)e^{-t}]_0^1 + 2I\right) \\ \iff & 5I = -\cos(2)e^{-1} + 1 + 2\sin(2)e^{-1} \\ \iff & I = \frac{2}{5}\sin(2)e^{-1} - \frac{1}{5}\cos(2)e^{-1} + \frac{1}{5}\end{aligned}$$
Il n'est pas possible de plus simplifier cette expression. Notez qu'on aboutit au même résultat en primitivant deux fois $t \mapsto \cos(2t)$ au départ,.

Exercice 7 ●●● Intégrales des puissances du logarithme

Pour $n \geqslant 0$, on pose
$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant e-1$. On rappelle que l'on a le droit d'intégrer une inégalité.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Que pouvez-vous en déduire ?
4. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
5. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Correction :
Détails :

1. On a
$$I_0 = \int_1^e \mathrm{d}x = e - 1.$$
On a $I_1 = \int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$. A ce stade, les plus affutés peuvent connaître une primitive de $x \mapsto \ln x$, sinon il faut savoir qu'on calcule cela avec "l'IPP masquée" :
$$I_1 = \int_1^e 1\times\ln x\,\mathrm{d}x = [x\times\ln x]_1^e - \int_1^e x\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = e\ln e - 1\times\ln 1 - (e-1) = 1.$$

A retenir : Une primitive de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto x \ln x - x$, on la retrouve avec une “IPP masquée" en écrivant $\ln x = 1 \times \ln x$.

2. Une technique standard est d'encadrer la fonction que l'on intègre par des fonctions constantes. On a

$$\forall x \in [1, e], \quad 0 \leqslant \ln x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \text{donc } 0 \leqslant (\ln x)^n \leqslant 1.$$

Ainsi en intégrant ces inégalités :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_1^e \mathrm{d}x = e - 1.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour comparer I_n et I_{n+1}, on peut comparer les fonctions sous l'intégrales. Pour $x \in [1, e]$, on a $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, et donc

$$(\ln x)^{n+1} = \ln x \times (\ln x)^n \leqslant (\ln x)^n,$$

et donc, toujours en intégrant :

$$I_{n+1} \leqslant I_n,$$

c'est-à-dire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. D'après le théorème de la limite monotone, on déduit que cette suite converge.
A retenir : Dès que vous avez un encadrement et la monotonie d'une suite, vous devez pensez au théorème de la limite monotone. Attention, ce théorème vous garantit qu'une suite converge mais ne vous donne pas sa limite.

4. On réalise une IPP. Il serait naturel d'écrire $(\ln x)^{n+1} = \ln x \times (\ln x)^n$ mais ce n'est pas une bonne piste, à cause de la primitive de $x \mapsto \ln x$ qui ne simplifie pas les choses. Ici l'IPP masquée est encore plus efficace : on pose

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \times (n+1) \times (\ln x)^n \end{cases}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} =& [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\ =& [x \times \ln(x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e x \times (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n\,\mathrm{d}x \\ =& e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

5. On sait déjà que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 0$, voir **Q3**. Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$. On alors alors $\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n = +\infty$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(e - (n+1)I_n) = -\infty.$$

Or on a aussi $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = \ell$, d'où une contradiction. Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
A retenir Il est standard de “passer” à la limite dans une relation de récurrence. On obtient ou bien une équation sur la limite ℓ, ou bien des raisonnements par l'absurde basée sur des formes indeterminées de limites.

Exercice 8 ••• — Une autre suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.

3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Que pouvez-vous en déduire ?

4. Démontrer que

$$I_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

6. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln 2.$$

7. En déduire la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque $n \to +\infty$.

8. Démontrer que

$$\forall u \geqslant 0, \quad \ln(1+u) \leqslant u.$$

On pourra réaliser une étude de fonction sur la différence $u - \ln(1+u)$.

9. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

10. En déduire l'encadrement

$$1 - \frac{\ln 2}{n} \leqslant I_n \leqslant 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Voyez-vous l'intérêt d'un tel encadrement ?

4 Approximations de fonctions

▬ Exercice 9 ●○○ ▬ Des DLs rapides

Donner les développements limités au premier ordre en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x$.
2. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
4. $x \mapsto \ln(1+x)$.

Correction :

Méthode : Etant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, son DL à l'ordre 1 en 0 est donné, d'après le cours, par

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\epsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Détails :

On applique cette formule aux fonctions de l'exercice, qui sont bien toutes dérivables en 0 :

1. Ici on a $f(x) = e^x$, donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. On a donc
$$e^x = 1 + x + x\epsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$
2. Ici on a $f(x) = \frac{1}{1-x}$, donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. On a donc
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x\epsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$
3. Ici on a $f(x) = \frac{1}{1+x}$, donc $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$. On a donc
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\epsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$
4. Ici on a $f(x) = \ln(1+x)$, donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On a donc
$$\ln(1+x) = x + x\epsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

▬ Exercice 10 ●●○ ▬ Approcher des angles

1. **a.** Donner les développements limités au premier ordre en $\frac{\pi}{4}$ des fonctions cos et sin.

   b. En déduire des valeurs approchées de $\sin(44°)$ et $\cos(46°)$. Etes-vous satisfait par ce résultat ?
2. **a.** Donner le développement limité au premier ordre en 0 de la fonction sin.

   b. Démontrer par une étude de fonctions, que
$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$
   En déduire une valeur approchée de $\sin(3°)$, en précisant la qualité de l'approximation.

5 Produit vectoriel

▬ Exercice 11 ●○○ ▬ Normale à un plan

Soit le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 3y - 5z = 8$.

1. Déterminer trois points non alignés A, B et C du plan.
2. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Que dire de ce vecteur ?
3. Montrer que ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{n} = (2, -3, -5)$.

▬ Exercice 12 ●●○ ▬ Avec des paramètres

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(3, 2, -4)$ et $(4, y, z)$ dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixée.

1. Donner des conditions pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
2. Exhiber un vecteur $\vec{v}$ satisfaisant ces conditions, puis un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale.
3. Comment transformer cette base pour la rendre orthonormale ?

Equations différentielles

▬ Exercice 13 ●●○ ▬ Premières équadiffs

Résoudre les équations différentielles suivantes, assorties de leurs conditions initiales :

1.
$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 2\sin x \\ y(\frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases}$$

Correction :
Méthode :
La stratégie est donnée par le cours :

- On résout l'équation homogène associée.
- On donne une solution particulière de (1).
- On conclut avec le théorème de superposition.

Détails :

1. Commençons par résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 avec second membre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + 2y(x) = x^2. \tag{1}$$

On commence par résoudre l'équation différentielle homogè associée :

$$y' + 2y = 0.$$

L'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre (1). La forme du second membre suggère de chercher un polynôme du second degré. Soient α, β et γ trois réels, et soit $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ le polynôme associé. On a

$$P'(x) + 2P(x) = 2\alpha x + \beta + 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 2\alpha x^2 + (2\alpha + 2\beta)x + \beta + 2\gamma.$$

Ainsi, puisque deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients (identification des coefficients), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x) + 2P(x) = x^2 \iff \begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $y_p(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2})$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.
On conclut avec le théorème de superposition : toute solution y de l'équation différentielle avec second membre est la somme de y_p et d'une solution de l'équation homogène :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-2x} + y_p(x).$$

La condition $y(0) = 1$ devient alors

$$\lambda + y_p(0) = 1,$$

ce qui équivaut, puisque $y_p(0) = \frac{1}{4}$, à $\lambda = \frac{3}{4}$.
On conclut : l'équation différentielle assortie de sa condition initiale a une unique solution, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right).$$

2. La stratégie est la même qu'à la question précédente, la différence étant ddans la recherche d'une solution particulière.
On commence par résoudre l'équation différentielle homogè associée :

$$y' + y = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est $\{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On cherche maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre

$$y'(x) + y(x) = 2\sin x. \tag{2}$$

La forme du second membre suggère de chercher une somme de fonctions trigonométriques. Soient α et β deux réels, et soit $y_p(x) = \alpha \sin x + \beta \cos x$ la fonction candidate (avec α et β deux réels à trouver). On a

$$y_p'(x) + y_p(x) = (\alpha \cos x - \beta \sin x) + (\alpha \sin x + \beta \cos x) = (\alpha - \beta)\sin x + (\alpha + \beta)\cos x.$$

Ainsi, une condition suffisante* pour que y_p soit solution de (2) est :

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $y_p(x) = \sin x - \cos x$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

*. c'est en fait une équivalence, c'est-à-dire qu'on peut identifier les coefficients devant sin et cos, mais il faudrait le démontrer, et on a juste besoin que "ca marche", c'est-à-dire que f soit solution

On conclut avec le théorème de superposition : toute solution y de l'équation différentielle avec second membre est la somme de y_p et d'une solution de l'équation homogène :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-x} + y_p(x).$$

La condition $y(\frac{\pi}{4}) = -1$ devient alors

$$\lambda e^{-\frac{\pi}{4}} + y_p(\frac{\pi}{4}) = -1,$$

ce qui équivaut, puisque $y_p(\frac{\pi}{4}) = 0$, à $\lambda = -e^{\frac{\pi}{4}}$.

On conclut : l'équation différentielle assortie de sa condition initiale a une unique solution, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = -e^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} + \sin x - \cos x.$$

Exercice 14 ●●● Un second membre plus technique

Résoudre

$$\begin{cases} y'(x) + 3y(x) = -2e^{4x} + e^{-3x} \\ y(0) = 8 \end{cases}$$

Quelques commentaires avant de se lancer (ou après avoir galéré) : Attention, vous allez être amené parmi les différentes étapes à chercher une solution particulière de

$$y'(x) + 3y(x) = e^{-3x}.$$

Comme $x \mapsto e^{-3x}$ est solution de l'équation homogène, on ne peut pas chercher de solution particulière sous la forme $x \mapsto ae^{-3x}$: si on injecte cela dans le membre de gauche, on trouve 0. M. Scotto dit que cette fonction “est dans le noyau” (explications au S2...).

On doit alors chercher une solution “en montant le degré”, a priori sous la forme $x \mapsto (ax+b)e^{-3x}$. Mais après calculs, vous trouvez une valeur pour a, mais rien sur b... (et donc on pouvait chercher sous la forme axe^{-3x}). Avez-vous compris pourquoi ?

Exercice 15 ●●○ Chute libre avec frottement

Un corps de masse m est laché sans vitesse initiale d'une hauteur $h > 0$ à l'instant $t = 0$. On note $z(t)$ sa hauteur selon l'axe vertical ascendant, et $v(t) = z'(t)$ sa vitesse à l'instant t.

L'objet chute verticalement, il est soumis à son poids, ainsi qu'à un frottement proportionnelle à sa vitesse, avec un coefficient de frottement $\alpha > 0$. Après projection de la loi de Newton selon l'axe (Oz), on obtient

$$mv' = -\alpha v - mg,$$

avec les conditions initiales

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad z(0) = h.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sur la vitesse v.

2. En déduire la position z comme fonction du temps.

Correction :

1. On met l'équation sous la forme du cours, appelée forme normalisée :

$$v' + \frac{\alpha}{m} v = -g. \tag{3}$$

L'équation homogène associée à (3) est

$$v' + \frac{\alpha}{m} v = 0,$$

ses solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$v(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m} t},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

On cherche maintenant une solution particulière de (3). Puisque le second membre est constant, on cherche cette solution particulière sous la forme d'une constante. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v_c(t) = -\frac{mg}{\alpha}$$

convient.

D'après le théorème de superposition, une fonction v est solutions de (3) si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = \lambda e^{-\frac{\alpha}{m} t} - \frac{mg}{\alpha}.$$

La conditon initiale $v(0) = 0$ est alors équivalente à $\lambda = \frac{mg}{\alpha}$, et donc la vitesse est donnée par

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}(e^{-\frac{\alpha}{m} t} - 1).$$

On vérifie bien que la vitesse est négative, ce qui est cohérent puis l'axe est ascendant, et donc l'objet descend, et que cette vitesse est décroissante, donc qu'elle augmente en valeur absolue, et donc l'objet accélère. On peut noter que

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = v_c,$$

c'est-à-dire que la vitesse tend vers la vitesse constante pour laquelle le frottement est exactement compensée par le poids.

2. On a donc
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z'(t) = v(t) = \frac{mg}{\alpha}(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1).$$
Afin de trouver z, on primitive la fonction ci-dessus : on obtient que la fonction z est de la forme
$$z(t) = -\frac{m^2g}{\alpha^2}e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha}t + C.$$
La condition $z(0) = h$ va permettre de déterminer C : en effet, on trouve
$$z(0) = -\frac{m^2g}{\alpha^2} + C$$
et donc
$$C = h + \frac{m^2g}{\alpha^2}.$$
Au final, on obtient
$$z(t) = \frac{m^2g}{\alpha^2}(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}) - \frac{mg}{\alpha}t + h.$$
Remarque : On peut noter que la quantité $\frac{m}{\alpha}$ est homogène à un temps, il est standard de l'appeler τ. On a alors la formule plus synthétique
$$z(t) = g\tau^2(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - g\tau t + h.$$

Pour aller plus loin : La quantité τ est appelée *temps caractéristique* : sa valeur permet de savoir quand la quantité (sans unité) $e^{-\frac{t}{\tau}}$ est négligeable devant 1 (et ce dans n'importe que problème faisant intervenir une telle quantité), par exemple lorsque $t = \tau$, on a $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 0.63$ tandis que lorsque $t = 3\tau$, on a $1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 0.95$. Ici cela a peu d'importance car le terme $g\tau^2(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ est *rapidement* dominé par le terme $-g\tau t$.

Sur un autre plan, on peut se demander ce qu'il se passe lorsque $\alpha \to 0$, c'est-à-dire lorsque le coefficient de frottement tend vers 0. On constate que les solutions trouvées pour z et v n'ont pas de limite, et qu'on ne retrouve naïvement pas la solution de l'équation différentielle sans frottement $z'' = -g$, dont la solution est $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h$ (toujours avec une vitesse initiale nulle).

Exercice 16 ●●○ Oscillateurs

1. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, et $f \in \mathbb{R}$ une constante. Résoudre les équations différentielles

a. $y'' + \omega^2 y = f$ **b.** $y'' - \omega^2 y = f$.

Laquelle décrit un oscillateur sans frottement ?

2. On ajoute un terme sur la première équation :
$$y'' + \alpha y' + \omega^2 y = f, \quad \text{avec } \alpha \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}].$$
Pour quel signe de α ce terme est-il appelé terme d'amortissement ?

Correction :
Méthode :
La stratégie est donnée par le cours :

- On résout l'équation homogène associée. Pour cela on introduit une équation caractéristique dont on cherche les racines (pas toujours besoin de foncer sur le discriminant). On applique ensuite les formules.
- On donne une solution particulière de l'équation différentielle. Puisque le second membre est constant, on la cherche sous la forme d'une constante.
- On conclut avec le théorème de superposition.

Détails :

1. a. On associe l'équation homogène $y'' + \omega^2 y = 0$. Pour la résoudre, on associe l'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Ses racines sont $r_1 = -i\omega$ et $r_2 = i\omega$. Le cours donne alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène
$$\mathcal{S}_h = \{x \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$
On cherche une solution partculière sous la forme d'une constante et on trouve que $\frac{f}{\omega^2}$ est solution. D'après le théorème de superposition, l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{f}{\omega^2}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

b. On applique la même méthode, mais il y a une différence majeure : l'équation homogène associée est désormais $y'' - \omega^2 y = 0$, et l'équation caractéristique a des racines réelles à savoir $r_1 = -\omega$ et $r_2 = \omega$. Ainsi, en concluant de la même manière, l'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \frac{f}{w^2}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

C'est cette deuxième équation qui décrit un oscillateur sans frottement, puisque les solutions sont périodiques (elles “oscillent”).

A retenir : L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ intervient dans tellement de chapitres de la physique que vous devez savoir par coeur que ses solutions sont de la forme $t \mapsto A\cos\omega t + B\sin\omega t$. Avec l'expérience, on évitera de calculer péniblement les solutions complexes d'une équation caractéristique...

2. On suit la même stratégie. L'équation caractéristique est maintenant

$$r^2 + \alpha r + \omega^2 = 0.$$

On doit calculer le discriminant : $\Delta = \alpha^2 - 4\omega^2$. On voit alors où sert l'hypothèse $\alpha \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$, en effet on a :

$$|\alpha| \leqslant \frac{\omega}{2} \iff \alpha^2 \leqslant \frac{\omega^2}{4} \iff \Delta < 0.$$

On a deux racines complexes pour l'équation caractéristique :

$$-\frac{\alpha}{2} - i\beta \quad \text{et} \quad -\frac{\alpha}{2} + i\beta \quad \text{avec } \beta = \frac{\sqrt{4\omega^2 - \alpha^2}}{2}.$$

Le cours donne la forme des solutions de l'équation homogène :

$$\mathcal{S}_h = \{t \mapsto (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))e^{-\frac{\alpha}{2}t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On trouve encore la même solution particulière constante : $\frac{f}{\omega^2}$. On déduit du théorème de superposition que l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))e^{-\frac{\alpha}{2}t} + \frac{f}{\omega^2},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Si $\alpha > 0$, alors le facteur exponentielle tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$, et par théorème d'encadrement (théorème des gendarmes), on a

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{f}{\omega^2}.$$

En général, le terme $\alpha y'$ dans l'équation différentielle provient des forces de frottement (ou “d'amortissement”), qui s'oppose au mouvement et, comme on vient de le voir, il conduit “en temps long" à une position immobile. Si $\alpha = 0$ (frottements négligés), la solution oscille indéfiniement.

A l'inverse, si $\alpha < 0$, la solution diverge lorsque $t \to +\infty$, ce qui n'est pas physiquement pertinent.