Feuille d'exercices 1
Premiers outils mathématiques

1 Superposition de signaux

Exercice 1 ●○○ — Somme de deux sinusoïdes

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

1. Trouver $r > 0$ et $\phi \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = r\cos(x - \phi).$$

2. Quelle est la valeur maximale de la fonction ? Quand est-elle atteinte ? Esquisser son graphe.

3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$f(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b. Quelles sont les solutions qui sont dans l'intervalle $[-4\pi, 3\pi]$?

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin(3x) + \cos(3x) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Exercice 2 ●●● — Avec une inégalité

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t) = -1,$$

2. Résoudre dans $[0, 2\pi]$:

$$\sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t) \leqslant -1,$$

Exercice 3 ●●○ — Différentes amplitudes

1. On considère les deux signaux

$$S_1(t) = 3\cos(4t + \frac{7\pi}{6}) \quad \text{et} \quad S_2(t) = -\sqrt{3}\sin(4t + \frac{7\pi}{6}).$$

Mettre leur somme S sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$, en précisant les valeurs de ω, A et φ.

2. On superpose (c'est-à-dire qu'on ajoute) les deux signaux

$$S_1(t) = a\cos(3t + \varphi) \quad \text{et} \quad S_2(t) = 2\sqrt{3}\sin(3t + \frac{2\pi}{3}),$$

où a et φ sont inconnus. On obtient le signal S, que l'on mesure. On trouve que S vaut

$$S(t) = 4\cos(3t + \frac{\pi}{3}).$$

Déterminer les valeurs possibles pour l'amplitude a et la phase φ du signal S_1.

2 Composées de fonctions

Exercice 4 ●○○ — Déterminer des composées

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants, en précisant dans chaque cas l'ensemble de définition des fonctions données ainsi que des fonctions construites :

1. $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
3. $f(x) = x^3 + 1$ et $g(x) = \ln(x)$ (on étudiera au préalable la fonction f).

Exercice 5 ●○○ — Dériver des composées

Pour chacunes des fonctions h ci-dessous, donner l'ensemble de définition puis calculer leurs dérivées. On pourra commencer par écrire h sous la forme $g \circ f$, en précisant les fonctions g et f :

1. $h : x \mapsto 5e^{7-3x^2}$

2. $h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3}$.

3. $h : x \mapsto \frac{1}{x^3+1}$.

3 Intégrations par parties

Exercice 6 ●●○ — Quelques intégrations par parties

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(2t)\,\mathrm{d}t$.
2. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto x\ln(x)$.
3. A l'aide d'un double intégration par parties, déterminer $\int_0^1 \cos(2t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 ●●● — Intégrales des puissances du logarithme

Pour $n \geqslant 0$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant e-1$. On rappelle que l'on a le droit d'intégrer une inégalité.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Que pouvez-vous en déduire ?
4. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
5. En raisonnant par l'absurde, démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Exercice 8 ●●● — Une autre suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant 1$.
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Que pouvez-vous en déduire ?
4. Démontrer que
$$I_n = 1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$
6. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln 2.$$
7. En déduire la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque $n \to +\infty$.
8. Démontrer que
$$\forall u \geqslant 0, \quad \ln(1+u) \leqslant u.$$
On pourra réaliser une étude de fonction sur la différence $u - \ln(1+u)$.
9. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
10. En déduire l'encadrement
$$1 - \frac{\ln 2}{n} \leqslant I_n \leqslant 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$
Voyez-vous l'intérêt d'un tel encadrement ?

4 Approximations de fonctions

Exercice 9 ●○○ — Des DLs rapides

Donner les développements limités au premier ordre en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x$.
2. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
3. $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
4. $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice 10 ●●○ — Approcher des angles

1. **a.** Donner les développements limités au premier ordre en $\frac{\pi}{4}$ des fonctions cos et sin.
   b. En déduire des valeurs approchées de $\sin(44°)$ et $\cos(46°)$. Etes-vous satisfait par ce résultat ?
2. **a.** Donner le développement limité au premier ordre en 0 de la fonction sin.
   b. Démontrer par une étude de fonctions, que
$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x - \sin x \leqslant \frac{x^3}{6}.$$
En déduire une valeur approchée de $\sin(3°)$, en précisant la qualité de l'approximation.

5 Produit vectoriel

Exercice 11 ●○○ Normale à un plan

Soit le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 3y - 5z = 8$.

1. Déterminer trois points non alignés A, B et C du plan.

2. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Que dire de ce vecteur ?

3. Montrer que ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{n} = (2, -3, -5)$.

Exercice 12 ●●○ Avec des paramètres

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(3, 2, -4)$ et $(4, y, z)$ dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixée.

1. Donner des conditions pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

2. Exhiber un vecteur $\vec{v}$ satisfaisant ces conditions, puis un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthogonale.

3. Comment transformer cette base pour la rendre orthonormale ?

Equations différentielles

Exercice 13 ●●○ Premières équadiffs

Résoudre les équations différentielles suivantes, assorties de leurs conditions initiales :

1.

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 2\sin x \\ y(\frac{\pi}{4}) = -1 \end{cases}$$

Exercice 14 ●●● Un second membre plus technique

Résoudre

$$\begin{cases} y'(x) + 3y(x) = -2e^{4x} + e^{-3x} \\ y(0) = 8 \end{cases}$$

Quelques commentaires avant de se lancer (ou après avoir galéré) : Attention, vous allez être amené parmi les différentes étapes à chercher une solution particulière de

$$y'(x) + 3y(x) = e^{-3x}.$$

Comme $x \mapsto e^{-3x}$ est solution de l'équation homogène, on ne peut pas chercher de solution particulière sous la forme $x \mapsto ae^{-3x}$: si on injecte cela dans le membre de gauche, on trouve 0. M. Scotto dit que cette fonction “est dans le noyau” (explications au S2...).

On doit alors chercher une solution “en montant le degré”, a priori sous la forme $x \mapsto (ax + b)e^{-3x}$. Mais après calculs, vous trouvez une valeur pour a, mais rien sur b... (et donc on pouvait chercher sous la forme axe^{-3x}). Avez-vous compris pourquoi ?

Exercice 15 ●●○ Chute libre avec frottement

Un corps de masse m est laché sans vitesse initiale d'une hauteur $h > 0$ à l'instant $t = 0$. On note $z(t)$ sa hauteur selon l'axe vertical ascendant, et $v(t) = z'(t)$ sa vitesse à l'instant t.

L'objet chute verticalement, il est soumis à son poids, ainsi qu'à un frottement proportionnelle à sa vitesse, avec un coefficient de frottement $\alpha > 0$. Après projection de la loi de Newton selon l'axe (Oz), on obtient

$$mv' = -\alpha v - mg,$$

avec les conditions initiales

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad z(0) = h.$$

1. Résoudre l'équation différentielle sur la vitesse v.

2. En déduire la position z comme fonction du temps.

Exercice 16 ●●○ Oscillateurs

1. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$, et $f \in \mathbb{R}$ une constante. Résoudre les équations différentielles

a. $y'' + \omega^2 y = f$ **b.** $y'' - \omega^2 y = f$.

Laquelle décrit un oscillateur sans frottement ?

2. On ajoute un terme sur la première équation :

$$y'' + \alpha y' + \omega^2 y = f, \qquad \text{avec} \quad \alpha \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}].$$

Pour quel signe de α ce terme est-il appelé terme d'amortissement ?