Feuille d'exercices 14
Espaces vectoriels, part I

Exercice 1 ●○○ **Un exemple facile** Montre que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

$$F = \{(x,y)|\ x+y=0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y)|\ x-y=0\}$$

sont des espaces vectoriels. L'ensemble $F \cup G$ est-il un espace vecoriel ?

Exercice 2 ●○○ **Des SEV à « vues »**

1. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E.
   - **a.** L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   - **b.** L'ensemble des fonctions continues qui s'annulent en π.
   - **c.** L'ensemble des fonctions telles que $f(\pi) = 3$.
   - **d.** L'ensemble des polynômes tels que $P(X+1) = 2P(X)$ et $P(3) = 0$.
   - **e.** L'ensemble des fonctions croissantes.
   - **f.** L'ensemble des fonctions monotones.
   - **g.** L'ensemble des fonctions paires.
   - **h.** L'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto a\cos(x-\varphi)$, avec $(a,\varphi) \in \mathbb{R}^2$.
   - **i.** L'ensemble des fonctions bornées.
   - **j.** L'ensemble des fonctions majorées.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E. Le cas échéant, en donner une base.
   - **a.** $F = \{(x,y,z)|2x+y+4z=1\}$.
   - **b.** $F = \{(x,y,z)|x-y+3z=0\}$.
   - **c.** $F = \{(x,y,z)|5x-3y+2z \geqslant 0\}$.
   - **d.** $F = \{(x,y,z)|x^2+2y^2+4z^2-2xy-4yz \geqslant 0\}$ (attention au piège).
   - **e.** $F = \{(x,y,z)|x=yz\}$.

Correction :

Méthode :

1. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E.
   - **a.** On vérifie la stabilité par combinaison linéaire (direct).
   - **b.** On vérifie la stabilité par combinaison linéaire (direct).
   - **c.** La fonction nulle vérifie-t-elle cette condition ?
   - **d.** On peut introduire deux sous-ensemble, montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels, et conclure par intersection.
   - **e.** Si f est strictement croissante, que dire de $-f$.
   - **f.** On peut avoir f et g monotones mais pas $f+g$.
   - **g.** On vérifie la stabilité par combinaison linéaire (direct).
   - **h.** Pas évident... on peut développer et chercher à faire un lien avec $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.
   - **i.** On vérifie la stabilité par combinaison linéaire (direct). La mise en forme est intéressante.
   - **j.** Si f est majorée, la fonction $-f$ l'est-elle forcément.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E. Le cas échéant, en donner une base.
   - **a.** L'équation n'est pas homogène, donc...
   - **b.** Classique, voir cours.
   - **c.** Si un triplet vérifie cette inégalité, que dire de son opposé ?
   - **d.** Vu la tête de l'inéquation, on penserait que non. Ceci dit, on flaire l'identité remarquable... si je vous dit que $(a-b)^2 \geqslant 0$, en fait je vous dis rien...
   - **e.** L'équation n'est pas linéaire, trouver un triplet u qui fonctionne et regarder $-u$ ou encore $2u$ fonctionne encore.

Détails :

1. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E.
   - **a.** Oui, voir TD.
   - **b.** Oui, voir TD.
   - **c.** Non, voir TD.
   - **d.** Oui, voir TD.
   - **e.** Non, voir TD.

f. Non, voir TD.

g. Vérifions les deux points du cours :

- La fonction nulle est paire.
- Soit $(f, g) \in F^2$ deux fonctions paires, ainsi que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a

$$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$

ce qui prouve que $\lambda f + \mu g \in F$. L'ensemble des fonctions pâires est donc stables par combinaison linéaire

Ces deux points prouvent F un sous-espace vectoriel de E.

h. Montrer que $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$.

i. Vérifions les deux points du cours :

- La fonction nulle est bornée.
- Soit $(f, g) \in F^2$ deux fonctions bornées, c'est-à-dire qu'il existe $M_1 \geqslant 0$ et $M_2 \geqslant 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant M_1 \quad \text{et} \quad |g(x)| \leqslant M_2.$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |(\lambda f + \mu g)(x)| &= |\lambda f(x) + \mu g(x)| \\ &\leqslant |\lambda f(x)| + |\mu g(x)| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &= |\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \\ &\leqslant |\lambda| M_1 + |\mu| M_2. \end{aligned}$$

Cela prouve que $\lambda f + \mu g$ est bornée, et donc l'ensemble des fonctions paires est stable par combinaison linéaire.

Ces deux points prouvent F un sous-espace vectoriel de E.

j. La fonction $f : x \mapsto -x^2$ est majorée (par 0), mais la fonction $-f$ n'est pas majorée. Cela prouve que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E. Le cas échéant, en donner une base.

a. L'origine $(0, 0, 0)$ n'est pas dans F, ce n'est donc pas un sous-espace vectorielde E.

b. L'ensemble F est un sous-espace vectorielde $\mathbb{R}^3$, voir le cours pour ce genre de preuve (l'origine est dedans, on peut vérifier la stabilité par combinaison linéaire, on bien on peut l'écrire comme un Vect).

c. Le triplet $u = (1, 0, 0)$ est dans F mais pas $-u$. Cela prouve que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

d. C'est un piège ensembliste : l'inéquation est en fait toujours vérifiée comme on va le voir. On a $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz = (x - y)^2 + (y - 2z)^2$, cette quantité est donc toujours positive. Ainsi, $F = E$: c'est bien un sous-espace vectorielde E.

e. Le triplet $u = (1, 1, 1)$ est dans F mais pas $-u$. Cela prouve que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 •◦◦ — Union de SEV Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le but de cet exercice est de montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectorielde E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1. Supposons l'une des deux inclusions vraies. Que dire de $F \cup G$? Conclure.
2. Supposons réciproquement que qu'on n'a pas « $F \subset G$ ou $G \subset F$ ».

a. Traduire cette hypothèse avec des quantificateurs.

b. Conclure en utilisant la formule $x = (x + y) + (-y)$.

Correction :

Méthode :

1. Supposons l'une des deux inclusions vraies. Que dire de $F \cup G$? Conclure.
2. Supposons réciproquement que qu'on n'a pas « $F \subset G$ ou $G \subset F$ ».

a. Traduire cette hypothèse avec des quantificateurs.

b. Conclure en utilisant la formule $x = (x + y) + (-y)$.

Détails :

1. Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$, et si $G \subset F$ alors $F \cup G = G - F$. Dans les deux cas, $F \cup G$ est un sous-espace vectorielde E.
2. Supposons réciproquement que qu'on n'a pas « $F \subset G$ ou $G \subset F$ ».

a. Puisque on n'a pas $F \subset G$, il existe $x \in F$ avec $x \notin G$. De même, puisque on n'a pas $G \subset F$, il existe $y \in G$ avec $y \notin F$.

b. Supposons par l'absurde que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E. Alors $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$, donc par stabilité, $x + y \in F \cup G$. Est-il dans F ou dans G ? Supposons que $x + y \in G$, alors on aurait

$$x = \underbrace{(x + y)}_{\in G} + \underbrace{(-y)}_{\in G},$$

et donc $x \in G$ puisque G est un sous-espace vectorielde E, ce qui contredit l'hypothèse sur y. Par symétrique, si $x + y \in F$, on aboutit à $y \in F$. Dans les deux cas c'est absurde, et donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectorielde E.

Exercice 4 •○○ — Une famille de trois vecteurs Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et les deux vecteurs $e_1 = (1, 2, 1)$ et $e_2 = (1, 0, \alpha)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (e_1, e_2) est-elle une famille libre ?
2. Soit $e_3 = (-3, -10, 1)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
3. Qu'en déduire dans ce cas pour la famille (e_1, e_2, e_3) ?

Exercice 5 •○○ — Les équadiffs linéaires homogènes d'ordre 1 revisitées On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0,$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction inconnue. Montrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de la forme $\mathrm{Vect}(y_0)$, où on rappelera y_0 en fonction de a.

Correction :
Méthode :
Expliciter les solutions.
Détails :
Introduisons $A : x \mapsto \int^x a(t)\,\mathrm{d}t$, une primitive de a. Alors l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-A(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Posons $y_0 : x \mapsto e^{-A(x)}$, alors l'ensemble des solutions se réécrit $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(y_0)$. C'est une droite (de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 6 •○○ — Exemple de familles de $\mathbb{R}^3$ Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ? Génératrices dans $\mathbb{R}^3$?

1. La famille $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, -1, -1)$, $e_3 = (2, 1, 1)$ et $e_4 = (7, -5, 18)$.
2. La famille $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, -1, -1)$, $e_3 = (2, 1, 1)$.

Exercice 7 •○○ — Familles libres Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, -e_4, e_3)$.
2. (e_1, e_4).
3. (e_1).
4. $(2e_1 - e_2, e_2 + e_3, e_3 - e_4, e_4)$.
5. $(e_2 + e_3, e_3, e_4, -e_2 + 2e_3)$.

Correction :
Méthode :

1. On revient à la définition, mais c'est direct ici.
2. Direct.
3. Pour un seul vecteur, la réponse est triviale.
4. On revient à la définition.
5. On peut revenir à la définition, on chercher à l'oeil à relier les vecteurs par une combinaison linéaire.

Détails :

1. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha e_1 - \beta e_4 + \gamma e_3 = 0$. Puisque la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, on a $\alpha = -\beta = \gamma = 0$. Cela prouve que la famille $(e_1, -e_4, e_3)$ est libre.
2. C'est une sous-famille de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) qui est libre, elle est donc libre. On peut aussi dire qu'ils ne sont pas colinéaires, sinon (e_1, e_2, e_3, e_4) ne serait pas libre.
3. Le vecteur e_1 est non nul, sinon (e_1, e_2, e_3, e_4) ne serait pas libre. Un vecteur non nul forme toujours une famille libre.
4. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ tels que
$$\lambda_1(2e_1 - e_2) + \lambda_2(e_2 + e_3) + \lambda_3(e_3 - e_4) + \lambda_4 e_4 = 0.$$
On a alors, en regroupant selon chaque vecteur :
$$2\lambda_1 e_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2)e_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_3 + \lambda_4 e_4 = 0.$$
Puisque la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre, on déduit :
$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$
Cela prouve que la famille $(2e_1 - e_2, e_2 + e_3, e_3 - e_4, e_4)$ est libre.
5. On peut procéder comme ci-dessus et aboutir à un système, mais on peut aussi repérer que
$$(e_2 + e_3) + (-e_2 + 2e_3) = e_3,$$
c'est-à-dire qu'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres. Cela prouve que la famille n'est pas libre.

Exercice 8 •○○ — Familles de $\mathbb{R}^3$ Soient $e_1 = (-2, 1, 1)$, $e_2 = (1, -2, -3)$, $e_3 = (1, 4, 7)$ et $e_4 = (1, 1, 2)$.

1. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille (e_1, e_2) est-elle une base de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$?
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Exercice 9 ●○○ **sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$** Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. $\mathrm{Vect}((0,3,2,1),(2,-2,-6,4),(4,5,4,3),(2,1,1,1))$
2. $\mathrm{Vect}((1,2,-1,1),(3,-1,2,1),(1,-5,4,-1),(3,-8,7,1),(-4,20,-16,4))$.

Dans chaque cas, donner des équations caractérisant le sous-espace vectoriel engeandré.

Exercice 10 ●●○ **Famille de matrices** Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$. Soit $F = \mathrm{Vect}(I_3, M, M^2)$.

1. Donner une telle matrice (on pensera à une matrice triangulaire stricte).
2. Montrer que la famille (I_3, M, M^2) est libre.
3. En déduire que cette famille est une base de F.

Correction :

Méthode :

1. On a déjà vu ce genre de matrice lorsque l'on calculait les puissances d'une matrice triangulaire supérieure stricte.
2. Partir de la définition, et chercher à faire apparaître M^3.
3. Le plus dur est fait, on cite maintenant son cours. Veillez à bien dire « la famille est libre et génératrice donc c'est une base ».

Détails :

1. La matrice
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
convient.
2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\lambda_1 I_3 + \lambda_2 M + \lambda_3 M^2 = 0.$$
On multiplie cette identité par M^2 :
$$\lambda_1 M^2 + \lambda_2 M^3 + \lambda_3 M^4 = 0.$$
Or $M^4 = M^3 = 0$, ainsi, puisque $M^2 \neq 0$, on déduit $\lambda_1 = 0$. On revient à l'hypothèse qui s'écrit maintenant $\lambda_2 M + \lambda_3 M^2 = 0$. On multiplie par M, et par les mêmes arguments, on trouve $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_3 = 0$. Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Cela prouve que la famille (I_3, M, M^2) est libre.
3. La famille (I_3, M, M^2) est libre est génératrice de F par définition de F, elle est de plus libre, c'est donc une base de F.

Exercice 11 ●●○ **Sous-espace supplémentaires** Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{(x,y,z) \in E, x + y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(\lambda + \mu, -2\lambda - \mu, \lambda - \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. En donner des bases respectives.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. A-t-on $E = F + G$?
4. A-t-on $E = F \bigoplus G$?
5. Interpréter la question précédente.

Correction :

Méthode :

1. Standard, à savoir faire absolument.
2. Considérer $u \in F \cap G$ et revenir aux définitions.
3.
4.
5.

Détails :

1. On en appliquant directement les techniques du cours :
$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in E |\ x + y + 2z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in E |\ x = -y - 2z\} \quad \text{(on exprime une variable en fonction des autres)} \\ &= \{(-y-2z, y, z),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{(on réinjecte)} \\ &= \{y(-1,1,0) + z(-2,0,1),\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{(on met en facteur les variables libres)} \\ &= \mathrm{Vect}((-1,1,0);(-2,0,1)). \end{aligned}$$
Cela prouve que F est un espace vectoriel, et qu'une famille générarice en est $((-1,1,0);(-2,0,1))$. Or ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires, comme une famille de deux vecteurs non colinéaires est toujours libre, la famille $((-1,1,0);(-2,0,1))$ est une base de F.
On a directement :
$$G = \{\lambda(1,-2,1) + \mu(1,-1-1), (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,-2,1);(1,-1,-1)).$$
Cela prouve que G est un espace vectoriel, et qu'une famille générarice en est $((1,-2,1);(1,-1,-1))$. Or ces deux vecteurs sont clairement non colinéaires, comme une famille de deux vecteurs non colinéaires est toujours libre, la famille $((1,-2,1);(1,-1,-1))$ est une base de G.

2. Soit $u \in F \cap G$, puisque $u \in F$, on l'écrit $u = (x, y, z)$ avec $x + y + 2z = 0$, de plus comme $u \in G$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (\lambda + \mu, -2\lambda - \mu, \lambda - \mu)$. Ainsi, on a

$$u \in F \cap G \iff \exists (x, y, z, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^5, \quad \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -2\lambda - \mu, \\ z = \lambda - \mu \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Comment résoudre intélligement ce système ? Le pivot ne semble pas pertinent, on peut plutôt injecter x, y et z dans (L_4) pour exprimer relier λ et μ. On trouve que

$$u \in F \cap G \iff \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -2\lambda - \mu, \\ z = \lambda - \mu \\ \lambda - 2\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3\mu \\ y = -3\mu, \\ z = \mu \\ \lambda = 2\mu \end{cases}.$$

Finalement,

$$F \cap G = \{(3\mu, -3\mu, \mu),\ \mu \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((3, -3, 1)).$$

3. Bien qu'on aura bientôt des outils pour accéler la réponse, nous répondons ici à la main. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on cherche à savoir s'il existe $u = (x, y, z) \in F$ et $v = (\lambda + \mu, -2\lambda - \mu, \lambda - \mu) \in G$ tels que $(a, b, c) = u + v$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} a = x + \lambda + \mu \\ b = y - 2\lambda - \mu \\ c = z + \lambda - \mu \\ x + y + 2z = 0 \quad \text{car} \quad u \in F \end{cases} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1 - L_2 - 2L_3}{\iff} \begin{cases} x + \lambda + \mu = a \\ y - 2\lambda - \mu = b \\ z + \lambda - \mu = c \\ -\lambda + 2\mu = -a - b - 2c \end{cases}$$

Ouvrez l'oeil : ce système est échelonné par rapport à (x, y, z, λ, μ). Il admet donc des solutions (que l'on peut expliciter en fonction par exemple de λ, et bien sûr de (a, b, c). Finalement, on a prouvé :

$$\forall (a, b, c) \in E, \exists (u, v) \in F \times G,\ (a, b, c) = u + v.$$

Cela prouve que $E = F + G$.

4. Puisque $F \cap G \neq \{0\}$, la somme n'est pas directe, et on n'a pas $E = F \bigoplus G$. On pouvait ausi revenir à la définition : il n'y a pas unicité au système de la question précédente.

Exercice 12 •○○ **Familles de $\mathbb{R}^3$** Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi que les vecteurs $e_1 = (3, 2, -3)$, $e_2 = (1, 4, 1)$, $e_3 = (-1, -14, -7)$ et $e_4 = (10, 0, -14)$.

1. A-t-on $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$.
2. Décrire $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ à l'aide d'une ou de plusieurs équations cartésiennes.
3. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Est-ce un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$?

Exercice 13 ••○ **Sous-espace supplémentaires, bis** Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in E|\ x = 2y = -z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in E|\ 3x - y + 2z = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminez une base de F et une base de G.
3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

Correction :

Méthode :

1. Le mieux est d'écrire les sous-ensembles « comme un vect », en exprimant certaines des variables en fonction des autres, ce qui prépare la question suivante.
2. Avec la question précédente, on a déjà des familles génératrices, il faut justifier qu'elles sont libres.
3. Revenir à la définition. On verra des raccourcis au chapitre « dimension ».

Détails :

1. On a

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in E|\ x = 2y = -z\} \\ &= \{(2y, y, -2y),\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1, -2),\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((2, 1, -2)). \end{aligned}$$

Cela prouve que F est un espace vectoriel, et qu'une famille génerarice est donnée par le vecteur $(2, 1, -2)$.

De même, on a

$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z) \in E|\ 3x - y + 2z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in E|\ y = 3x + 2z\} \quad \text{(on exprime une variable en fonction des autres)} \\ &= \{(x, 3x + 2z, z),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{(on réinjecte)} \\ &= \{x(1, 3, 0) + z(0, 2, 1),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{(on met en facteur les variables libres)} \\ &= \mathrm{Vect}((1, 3, 0); (0, 2, 1)). \end{aligned}$$

Cela prouve que G est un espace vectoriel, et qu'une famille génératrice en est $((1, 3, 0); (0, 2, 1))$.

2. On a vu que $((2, 1, -2))$ est une famille génératrice de F, de plus un vecteur non nul forme une famille libre, ainsi $((2, 1, -2))$ est une base de F.
On a vu que $((1, 3, 0); (0, 2, 1))$ est une famille génératrice de G, de plus ces vecteurs sont non colinéaires, or deux vecteurs non colinéaire forment une famille libre, ainsi $((1, 3, 0); (0, 2, 1))$ est une base de G. Attention, cet argument aurait été faux pour plus de deux vecteurs, et il aurait fallu montrer la liberté autrement !

3. Revenons à la définition : on se donne $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ quelconque, et on doit montrer qu'il existe un unique couple $(u,v) \in F \times G$ tel que $(a,b,c) = u+v$. Ecrivons $u = \lambda(2,1,-2)$ et $v = (x, 3x+2z, z)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,z) \in \mathbb{R}^2$ des inconnues, on est amené à résoudre :

$$\begin{cases} a = 2\lambda + x \\ b = \lambda + 3x + 2z \\ c = -2\lambda + z \end{cases}, \quad \text{d'inconnue } (\lambda, x, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Après un pivot rapide, on constate que ce système admet une unique solution. On a donc montré que

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \exists! (u,v) \in F \times G \ \text{ tel que } \ (a,b,c) = u+v.$$

Cela prouve que F et G sont supplémentaires dans E, ce que l'on note $E = F \bigoplus G$. Notez qu'avec les outils du chapitre dimension, on se contentera de vérifier que $F \cap G = \{0\}$ et que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E) = 3$, ce qui est moins calculatoire.

Exercice 14 ●●○ — Sous-espace supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ Soit $E = \mathbb{R}^4$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in E, \begin{cases} x + y + 2z - 2t = 0 \\ 3x + y + z - t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}\right\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z,t) \in E, x - y - z - 5t = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminez une base de F et une base de G.
3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E ?
4. Donner un sous-espace vectoriel supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$.
5. Quelle stratégie utiliser si on vous demande un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$?

Correction :

Méthode :

1.

2.

3.

Détails :

1. On a après échelonnement (voir TD) :

$$\begin{cases} x + y + 2z - 2t = 0 \\ 3x + y + z - t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z - 2t = 0 \\ -2y - 5z + 5t = 0 = 0 \\ 2z - 8t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{15}{2}t \\ z = 4t \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$F = \{(\tfrac{3}{2}t, -\tfrac{15}{2}t, 4t, t), \text{ avec } t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((\tfrac{3}{2}, -\tfrac{15}{2}, 4, 1)) = \text{Vect}((3, -15, 8, 2)).$$

Cela prouve que F est un sous-espace vectorielde E, et que la famille $((\frac{3}{2}, -\frac{15}{2}, 4, 1))$ est génératrice de F.

De même, on a

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in E |\ x - y - z - 5t = 0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in E |\ x = y + z + 5t\} \quad \text{(on exprime une variable en fonction des autres)} \\ &= \{(y+z+5t, y, z, t),\ (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} \quad \text{(on réinjecte)} \\ &= \{y(1,1,0,0) + z(1,0,1,0) + t(5,0,0,1),\ (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}((1,1,0,0); (1,0,1,0); (5,0,0,1)). \end{aligned}$$

Cela prouve que G est un espace vectoriel, et qu'une famille génératrice en est $((1,1,0,0); (1,0,1,0); (5,0,0,1))$.

2. On a vu que la famille $((\frac{3}{2}, -\frac{15}{2}, 4, 1))$ est génératrice de F. De plus un vecteur non nul forme une famille libre, ainsi $((\frac{3}{2}, -\frac{15}{2}, 4, 1))$ est une base de F.
De même, on a vu que la famille $(e_1, e_2, e_3) = ((1,1,0,0); (1,0,1,0); (5,0,0,1))$ est génératrice de G. Montrons qu'elle est libre : soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0.$$

On a alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on a $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui prouve que la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. C'est donc une base de G.

Remarque : Notez que montrer la liberté d'une famille obtenue par échelonnement d'un système est souvent direct ! Il vaut tout de même mieux le faire pour montrer que vous connaissez votre cours.

3. On peut revenir à la définition, mais commençons par vérifier que la somme $F + G$ est directe, ce n'est peut-être pas le cas. Soit $u \in F \cap G$, puisque $u \in F$, on écrit

$$u = (\tfrac{3}{2}t, -\tfrac{15}{2}t, 4t, t), \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Puisque $u \in G$, l'équation de G donne :

$$\frac{3}{2}t + \frac{15}{2}t - 4t - 5t = 0 \iff 0 = 0,$$

ce qui traduit qu'un élément de F est automatiquement dans G, ainsi, on a $F \subset G$, et donc $F \cap G = F$, ce qui prouve que la somme $F + G$ n'est pas direct, et donc F et G ne sont pas supplémentaires.

Remarque : Ceux qui sont revenus à la définition auront abouti sur un système qui n'a pas une unique solution.

4. A ce stade, il faut avoir intuiter la notion de dimension : une base de G possédant trois éléments, on pense qu'un seul vecteur (qui n'est pas dans G) suffit à engendrer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$. Posons par exemple $e_4 = (1, 0, 0, 0)$, et prouvons que $\mathbb{R}^4 = G \bigoplus \text{Vect}(e_4)$. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, fixé mais quelconque, on veut monter que l'équation

$$(a, b, c, d) = u + \lambda(1, 0, 0, 0), \text{d'inconnues } u \in G \quad \text{et } \lambda \in \mathbb{R}$$

possède une unique solution. On profite d'avoir trouvé une base de G. On écrit donc $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$, et on résout :

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + 5\gamma + \lambda \\ b = \alpha \\ c = \beta \\ d = \gamma \end{cases}$$

Il est direct que ce système admet une unique solution $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (b, c, d, a - b - c - 5d)$, ce qui prouve que

$$\mathbb{R}^4 = G \bigoplus \text{Vect}(e_4),$$

donc que G et $\text{Vect}(e_4)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Remarque : Si on connait déjà le théorème du lien entre dimension et supplémentaire, on peut simplement constater que

$$\begin{cases} \dim G + \dim(\text{Vect}(e_4)) = 3 + 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4 \quad (\text{égalité des dimensions})) \\ G \cap \text{Vect}(e_4) = \{0\} \quad (\text{somme directe, à montrer à la main mais c'est facile}) \end{cases}$$

Cela suffit à affirmer que $E = G \bigoplus \text{Vect}(e_4)$.