Feuille d'exercices 13
Espaces vectoriels, part I

Exercice 1 •○○ — Un exemple facile Montre que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

$$F = \{(x, y)|\ x + y = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y)|\ x - y = 0\}$$

sont des espaces vectoriels. L'ensemble $F \cup G$ est-il un espace vecoriel ?

Exercice 2 •○○ — Des SEV à « vues »

1. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E.
   - **a.** L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
   - **b.** L'ensemble des fonctions continues qui s'annulent en π.
   - **c.** L'ensemble des fonctions telles que $f(\pi) = 3$.
   - **d.** L'ensemble des polynômes tels que $P(X + 1) = 2P(X)$ et $P(3) = 0$.
   - **e.** L'ensemble des fonctions croissantes.
   - **f.** L'ensemble des fonctions monotones.
   - **g.** L'ensemble des fonctions paires.
   - **h.** L'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto a\cos(x - \varphi)$, avec $(a, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.
   - **i.** L'ensemble des fonctions bornées.
   - **j.** L'ensemble des fonctions majorées.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Parmi les sous-ensembles F suivants de E, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E. Le cas échéant, en donner une base.
   - **a.** $F = \{(x, y, z)|2x + y + 4z = 1\}$.
   - **b.** $F = \{(x, y, z)|x - y + 3z = 0\}$.
   - **c.** $F = \{(x, y, z)|5x - 3y + 2z \geqslant 0\}$.
   - **d.** $F = \{(x, y, z)|x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz \geqslant 0\}$ (attention au piège).
   - **e.** $F = \{(x, y, z)|x = yz\}$.

Exercice 3 •○○ — Union de SEV Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le but de cet exercice est de montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectorielde E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1. Supposons l'une des deux inclusions vraies. Que dire de $F \cup G$? Conclure.
2. Supposons réciproquement que qu'on n'a pas « $F \subset G$ ou $G \subset F$ ».
   - **a.** Traduire cette hypothèse avec des quantificateurs.
   - **b.** Conclure en utilisant la formule $x = (x + y) + (-y)$.

Exercice 4 •○○ — Une famille de trois vecteurs Soient $E = \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et les deux vecteurs $e_1 = (1, 2, 1)$ et $e_2 = (1, 0, \alpha)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. La famille (e_1, e_2) est-elle une famille libre ?
2. Soit $e_3 = (-3, -10, 1)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $e_3 \notin \text{Vect}(e_1, e_2)$.
3. Qu'en déduire dans ce cas pour la famille (e_1, e_2, e_3) ?
4. Donner une (ou des) équation(s) caractéristique(s) du sous espace vectoriel engendré par (e_1, e_2).

Exercice 5 •○○ — Les équadiffs linéaires homogènes d'ordre 1 revisitées On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0,$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction inconnue. Montrer que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de la forme $\text{Vect}(y_0)$, où on rappelera y_0 en fonction de a.

Exercice 6 •○○ — Exemple de familles de $\mathbb{R}^3$ Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ? Génératrices dans $\mathbb{R}^3$?

1. La famille $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, -1, -1)$, $e_3 = (2, 1, 1)$ et $e_4 = (7, -5, 18)$.
2. La famille $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, -1, -1)$, $e_3 = (2, 1, 1)$.

Exercice 7 •○○ — Familles libres Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, -e_4, e_3)$.
2. (e_1, e_4).
3. (e_1).
4. $(2e_1 - e_2, e_2 + e_3, e_3 - e_4, e_4)$.
5. $(e_2 + e_3, e_3, e_4, -e_2 + 2e_3)$.

Exercice 8 •○○ — Familles de $\mathbb{R}^3$ Soient $e_1 = (-2, 1, 1)$, $e_2 = (1, -2, -3)$, $e_3 = (1, 4, 7)$ et $e_4 = (1, 1, 2)$.

1. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille (e_1, e_2) est-elle une base de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$?
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Exercice 9 •○○ — sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

1. $\mathrm{Vect}((0, 3, 2, 1), (2, -2, -6, 4), (4, 5, 4, 3), (2, 1, 1, 1))$
2. $\mathrm{Vect}((1, 2, -1, 1), (3, -1, 2, 1), (1, -5, 4, -1), (3, -8, 7, 1), (-4, 20, -16, 4))$.

Dans chaque cas, donner des équations caractérisant le sous-espace vectoriel engeandré.

Exercice 10 ••○ — Famille de matrices Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$. Soit $F = \mathrm{Vect}(I_3, M, M^2)$.

1. Donner une telle matrice (on pensera à une matrice triangulaire stricte).
2. Montrer que la famille (I_3, M, M^2) est libre.
3. En déduire que cette famille est une base de F.

Exercice 11 ••○ — Sous-espace supplémentaires Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in E, x + y + 2z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(\lambda + \mu, -2\lambda - \mu, \lambda - \mu), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. En donner des bases respectives.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. A-t-on $E = F + G$?
4. A-t-on $E = F \bigoplus G$?
5. Interpréter la question précédente.

Exercice 12 •○○ — Familles de $\mathbb{R}^3$ Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi que les vecteurs $e_1 = (3, 2, -3)$, $e_2 = (1, 4, 1)$, $e_3 = (-1, -14, -7)$ et $e_4 = (10, 0, -14)$.

1. A-t-on $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$.
2. Décrire $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ à l'aide d'une ou de plusieurs équations cartésiennes.
3. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. Est-ce un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$?

Exercice 13 ••○ — Sous-espace supplémentaires, bis Soit $E = \mathbb{R}^3$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in E |\ x = 2y = -z\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in E |\ 3x - y + 2z = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminez une base de F et une base de G.
3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 14 ••○ — Sous-espace supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ Soit $E = \mathbb{R}^4$, ainsi ques les sous-ensembles de E suivants :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in E, \left\{\begin{array}{l} x + y + 2z - 2t = 0 \\ 3x + y + z - t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{array}\right.\right\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in E, x - y - z - 5t = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminez une base de F et une base de G.
3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires dans E ?
4. Donner un sous-espace vectoriel supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$.
5. Quelle stratégie utiliser si on vous demande un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 15 ••○ — Famille de polynôme

Soient $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X - 1$ et $P_3 = X^2 + X$.

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Exprimer $P = 3X - 4$ dans la base (P_1, P_2, P_3).