Feuille d'exercices 13 Analyse asymptotique : relation de comparaison et DL

Exercice 1 ●○○

Trouver des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \ln(1+\sin x)$ en 0. **2.** $x \mapsto \operatorname{Arctan}(1+x) - \frac{\pi}{4}$ en 0.

Correction :

Méthode :

1. On peut composer des équivalents à droite, ou bien faire un DL.
2. On sait que $f(x)-f(a)$ est équivalent à $(x-a)f'(a)$ si $f'(a) \neq 0$ (pensez à l'équation de la tangente).

Détails :

1. On sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, et puisque $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$, on peut composer l'équivalent à droite :
$$\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x),$$
et donc en utilisant l'équivalent classique du sinus :
$$\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x,$$
Remarque : On a le droit de composer des équivalents à droite (c'est-à-dire de « poser $u = \dots$ », mais pas à gauche, en tout cas sans justification. En cas de doute sur la méthode, mieux vaut faire un DL : on a en 0
$$\ln(1+\sin x) = \ln(1+x+o(x)) = x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} x,$$
où on a utilisé que l'équivalent est le premier terme non nul du DL.

2. Posons $f(x) = \operatorname{Arctan}(1+x)$, alors f est $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, avec $f(0) = \frac{\pi}{4}$. De plus, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2},$$
et donc $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$. On sait alors que
$$f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} f'(0)x$$
ce qui donne
$$\operatorname{Arctan}(1+x) - \frac{\pi}{4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}.$$

Exercice 2 ●●○

1. Déterminer un équivalent simple de $x \mapsto x^{1/x} - 1$ en $+\infty$.
2. En déduire un équivalent simple de $x \mapsto x^{x^{1/x}} - x$ en $+\infty$.
3. Etudier la limite de $x \mapsto \dfrac{(x+1)^{1/x} - x^{1/x}(x\ln x)^2}{x^{x^{1/x}} - x}$ en $+\infty$.

Exercice 3 ●●○

1. Montrer que $\ln(\ln x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln x)$.
2. En déduire la limite de $x \mapsto \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{1/x}$ en $+\infty$.

Correction :

Méthode :

1. Par définition, on doit montrer que le quotient $\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}$ tend vers 0 en $+\infty$. Utiliser la croissance comparée.
2. Utiliser la forme exponentielle.

Détails :

1. On forme donc le quotient $\frac{\ln(\ln(x))}{\ln x}$, bien défini pour $x > 1$, et donc pour x assez grand. Pour trouver sa limite, on peut noter que
$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ par croissance comparée.}$$
Or on a $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc en posant $X = \ln x$ (ou plus précisément, par composition de limite) :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x} = 0.$$
Cela prouve le résultat demandé.
2.

Exercice 4 ●●○ — Des DL Donner les DL en a des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{1}{1-x+2x^2}$, en $a=0$, à l'ordre $n=5$.
2. $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, en $a=1$, à l'ordre $n=4$.
3. $x \mapsto e^{\sin x}$, en $a=0$, à l'ordre $n=4$.

Exercice 5 ●●○ — Calcul de limites Calculer les limites suivantes en 0 :

1. $x \mapsto \ln(1+x)\left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3}\right)$. 2. $x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x - \sin x}{\ln(1+x^3)}$. 3. $x \mapsto \frac{e^{-x^2}-1}{\sin^2 x}$.

Correction :

Méthode :

1. Mettre au même dénominateur et faire un DL pour voir les termes qui ne se compensent pas. Pour le facteur $\ln(1+x)$, le premier terme devrait suffire, comme souvent lors d'un produit, de même pour le dénominateur :
2. Même méthode.
3. Même méthode.

Détails :

1. On a
$$\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} = \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^3 \times \sin^3 x} = \frac{x^3 - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3}{x^3 \times (x + o(x))^3}$$
Or on a
$$(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3 = x^3(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))^3 = x^3(1 - \frac{3x^2}{6} + o(x^2)) = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^5),$$
et de manière directe :
$$(x + o(x))^3 = x^3 + o(x^3).$$
Ainsi :
$$\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} = \frac{\frac{x^5}{2} + o(x^5)}{x^6 + o(x^6)} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{x + o(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x}.$$
Or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc par produit :
$$\ln(1+x)\left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2},$$
Ce qui montre que la limite en 0 vaut $\frac{1}{2}$.
Remarque La difficulté est de savoir quel DL faire, à quel ordre, et quand passer sur des équivalents, plus simples pour les calculs. Pour un calcul de limite, on fait un DL pour des sommes qui se simplifient, DL « jusqu'à ce que le terme principal apparaisse ». Notez que si on vous avez demandé un prolongement dérivable, il vous aurait fallu un DL au final à l'ordre 1, et donc on ne pourrait pas se contenter d'un équivalent.
2. Trouvons un équivalent du numérateur en faisant des DL :
$$\operatorname{Arctan} x - \sin x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.$$
De plus,
$$\ln(1+x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^3,$$
on déduit par quotient déquivalent :
$$\frac{\operatorname{Arctan} x - \sin x}{\ln(1+x^3)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$
Cela prouve que
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Arctan} x - \sin x}{\ln(1+x^3)} = -\frac{1}{6}.$$
3. On a $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc, en utilisant l'équivalent du sinus, et par quotient :
$$\frac{e^{-x^2}-1}{\sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$
Donc la limite cherchée vaut -1.

Exercice 6 ●●○ — Primitiver un DL Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+1)$.

1. Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de f'.
2. En déduire celui à l'ordre 4 en 0 de f.

Correction :

Méthode :

1. On calcule f', attention, il faut transformer un peu l'expression et ne pas se jeter sur $\frac{1}{1+u}$...
2. On a le droit de primitiver un DL, mais il ne faut pas oublier la constante.

Détails :

1. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{2+2x+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}}.$$
Puisque $\lim_{x\to 0} x + \frac{x^2}{2} = 0$, on peut faire un DL en utilisant celui de $\frac{1}{1+u}$ en 0 :
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - (x + \frac{x^2}{2}) + (x + \frac{x^2}{2})^2 - (x + \frac{x^2}{2})^3 + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-(x+\frac{x^2}{2})+(x^2+x^3+o(x^3))-(x^3+o(x^3))+o(x^3)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)$$

2. On primitive le DL précédent, en pensant à la constante, qui s'obtient en évaluant en 0 :
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^4).$$

Exercice 7 ●○○ — Position relative à la tangente Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

1. Déterminer le DL de f à l'ordre 3 en 0.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
3. Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 8 ●●○ — Un prolongement par continuité et une tangente. Soit $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x-1}}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Quelle est la régularité de f sur cet ensemble ?
2. Déterminer le DL au voisinage de 1 de f à l'ordre 3.
3. En déduire que f peut être prolongée par continuité en 1, et que ce prolongement est dérivable.
4. Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 1.

Exercice 9 ●●○ — Une asymptote oblique. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$.

1. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
2. Montrer que f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, et préciser sa position relative par rapport à la courbe de f.

Exercice 10 ●●○ — Approcher des dérivées : les différences finies. Soit $f \in \mathscr{C}^4(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$.
2. Pour h petit, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ vous paraît-elle être une meilleure approximation du nombre dérivée que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$? Donner une application en cinématique.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$. Quelle application en cinématique ?
4. En quoi la formule précédente permet d'approcher numériquement des équations différentielles d'ordre 2 ? (faites un lien avec la méhode d'Euler).

Exercice 11 ●●○ — Aller plus loin pour la tangente

1. Retrouver le DL à l'ordre 3 de la fonction tan en 0.
2. En utilisant un lien entre $\tan'$ et $\tan^2$, en déduire le DL de tan à l'ordre 5.

Correction :

1. Vue en cours. En faisant le DL d'un quotient :
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$
2. On a $\tan' x = 1+\tan^2 x$. On peut donc faire le DL de $\tan^2$ à l'ordre 4, et intégrer. On a
$$\tan^2 x = x^2(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2))^2 = x^2(1+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)) = x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4).$$
et donc
$$\tan' x = 1+x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$$
Or on peut intégrer un DL (sans oublier la constante, qui vaut $\tan 0 = 0$:
$$\tan' x = \tan 0 + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Exercice 12 ●●● — Profiter d'une équadiff Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^x\cos x$

1. Calculer f' et f''.
2. Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, à savoir
$$y''+by'+cy = 0$$
où b et c sont à préciser.
3. Fixer des conditions initiales en 0 de sorte à avoir un problème de Cauchy dont f est la solution. Y a-t-il d'autres solutions ?
4. En déduire les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![2,6]\!]$, puis le DL à l'ordre 6 de f en 0.
5. Pour $k\in\mathbb{N}$, on note $u_k = f^{(k)}(0)$. Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire sa valeur explicite.
6. En déduire le DL à tout ordre de f en 0. Avec quelle autre méthode aurait-on pu calculer $f^{(k)}(0)$?

Correction :

1. Après calculs on a
$$f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) \quad \text{et} \quad f''(x) = -2e^x \sin(x).$$
2. On peut injecter et identifier, mais on voit de tête (commencez par raisonner sur f'') :
$$f'' = 2f' - 2f \iff f'' - 2f' + 2f = 0$$
3. En évaluant directement f et f' en 0, on a donc f solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$
Il n'y a pas d'autres solution puisque le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'unicité.
4. En déduire les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![2, 6]\!]$, puis le DL à l'ordre 6 de f en 0.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $u_k = f^{(k)}(0)$. Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire sa valeur explicite.
6. En déduire le DL à tout ordre de f en 0. Avec quelle autre méthode aurait-on pu calculer $f^{(k)}(0)$?

Exercice 13 •○○ — Equivalents de suites Déterminer un équivalent des suites suivantes en $+\infty$ (les **3** et **5** sont plus durs).

1. $u_n = n \sin \frac{1}{n^3}$. **2.** $u_n = \ln(\frac{n-1}{n})$. **3.** $\left(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})\right)^n$

4. $u_n = \frac{n - \ln n + \frac{4}{n}}{e^n - n^2}$. **5.** $u_n = \left(\frac{2n^5}{5n^4+3n^5}\right)^n$. **6.** $u_n = \binom{n}{p}$, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé.

Correction :
Méthode :
Détails :

1.
2.
3.
4. On met en facteur les termes dominants :
$$u_n = \frac{n}{e^n} \times \frac{1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{n^2}{e^n}}.$$
Or par croissance comparée :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{e^n} = 0.$$
On déduit :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{\ln n}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{n^2}{e^n}} = 1.$$
Ainsi par produit :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e^n}.$$
5. La forme exponentielle est indispensable :
$$u_n = e^{n\ln\left(\frac{2n^5}{5n^4+3n^5}\right)}.$$
Il assez facile de voir que l'exposant vérifie
$$n\ln\left(\frac{2n^5}{5n^4+3n^5}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(\frac{2}{3}),$$
mais cela ne suffit pas, car on ne peut pas toujours prendre l'exponentielle d'un équivalent ! A la place, on va faire des DL (ce qui correspond à aller plus loin) :
$$n\ln\left(\frac{2n^5}{5n^4+3n^5}\right) = n\ln\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{\frac{5}{3n}+1}\right) = n\ln(\tfrac{2}{3}) + n\ln\left(\frac{1}{\frac{5}{3n}+1}\right).$$
Faisons le DL de ce dernier terme, par rapport à $\frac{1}{n}$, qui tend bien vers 0, en s'arrêtant à $o(1)$ (car $e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$) :
$$n\ln\left(\frac{1}{\frac{5}{3n}+1}\right) = n\ln(1 - \frac{5}{3n} + o(\frac{1}{n})) = -\frac{5}{3} + o(1).$$
Ainsi, on a, lorsque $n \to +\infty$:
$$n\ln\left(\frac{2n^5}{5n^4+3n^5}\right) = n\ln(\frac{2}{3}) - \frac{5}{3} + o(1),$$
et donc par passage à l'exponentielle :
$$u_n = e^{(n\ln(\frac{2}{3}) - \frac{5}{3} + o(1))} = e^{n\ln(\frac{2}{3})} \times e^{-\frac{5}{3}} \times e^{o(1} = (\tfrac{2}{3})^n \times e^{-\frac{5}{3}} \times e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\tfrac{2}{3})^n \times e^{-\frac{5}{3}}.$$

Remarque Le piège aurait été d'écrire : $n\ln\left(\frac{2n^5}{5n^4+3n^5}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(\frac{2}{3})$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n\ln(\frac{2}{3})} = (\frac{2}{3})^n$, ce qui est faux, car on aurait manqué le facteur $e^{-\frac{5}{3}}$. Encore un exemple où doit prendre des précautions pour un exponentiel d'équivalents. Ayez en tête le contre-exemple standard : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ mais on n'a pas $e^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$ puisque $e^{n+1} = e \times e^n$: le $+1$ qui ne comptait pas devant n se met à compter car il devient un facteur lorsque l'on prend l'exponentielle.

6. Pas très clair avec la définition, mieux vaut utiliser la formule qui permet des calculs effectifs :
$$u_n = \frac{n \times \ldots \times (n-p+1)}{p!}.$$
Or pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, on a
$$\forall k \in [\![0\,, p-1]\!] : n-k \underset{n\to+\infty}{\sim} n,$$
et donc par produit d'équivalents (le numérateur ayant p facteurs) :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!}.$$
Remarque : Vérifiez (ou échauffez-vous) avec le cas $p = 2$ qui est facile. Par contre, la question est beaucoup plus dure si p dépend de n.

Exercice 14 ●●● Développement d'une suite implicite

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation
$$x^3 + nx - 1 = 0,$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, possède une unique solution. On la note u_n.

2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

3. Montrer que
$$u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^3}{n}.$$
En déduire que, lorsque $n \to +\infty$:
$$u_n - \frac{1}{n} = O(\frac{1}{n^4}).$$

4. (Pour aller plus loin). On pose $y_n = u_n - \frac{1}{n}$.

(i) Substituer u_n par $y_n + \frac{1}{n}$ dans l'équation définissant u_n.

(ii) Montrer que $y_n = -\frac{1}{n^4} + o(\frac{1}{n^6})$.

(iii) En déduire un développement asymptotique à deux termes de (u_n) en $+\infty$.

Exercice 15 ●●○ DL et dérivabilité

On a vu que
- f est continue en a si et seulement si elle y admet un DL à l'ordre 0 (sa limite).
- f est dérivable en a si et seulement si elle y admet un DL à l'ordre 1.

On va observer que ceci n'est plus vrai aux ordre supérieurs.

1. Quel résultat du cours affirme qu'une fonction n fois dérivable dans un voisinage de a y admet un DL à l'ordre n ?

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \ \text{sinon} \end{cases}.$$

a. La fonction f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

b. Admet-elle un DL d'ordre 2 en 0 ?

Correction :

1. C'est la formule de Taylor-Young.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \ \text{sinon} \end{cases}.$$

a. Il est direct par encadrement que
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$
ce qui prouve que f est continue en 0.
Etudions la dérivabilité. La fonction $x \mapsto -2x$ étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on est ramené à étudier le deuxième terme $g : x \mapsto 5x^3 \sin\frac{1}{x}$. On a :
$$\forall x \neq 0 : g'(x) = 5(3x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x\cos(\frac{1}{x})).$$
Toujours par encadrement, on a
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = 0,$$
cela prouve par le théorème de la limite de la dérivée que g est C^1 dans un voisinage de 0, avec $g'(0) = 0$.
La fonction g est-elle deux fois dérivable ? A ce stade il faut anticiper de tête que g'' n'a pas de limite en 0, on ne peut plus utiliser le théorème de la limite de la dérivée, à la place, on forme le taux d'accroissement de g' :
$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = 5(3x\sin(\frac{1}{x}) + \cos(\frac{1}{x})).$$
Le premier terme a une limite en 0, mais pas la deuxième, ce qui prouve que g n'est pas deux fois dérivable en 0.

b. Montrons, lorsque $x \to 0$:

$$x^3 \sin \frac{1}{x} = o(x^2).$$

Pour cela on revient à la définition, on forme

$$\frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = x \sin(\frac{1}{x}),$$

ainsi, par encadrement du sinus :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = 0,$$

ce qui prouve que

$$x^3 \sin \frac{1}{x} = o(x^2).$$

On déduit donc :

$$f(x) = 2x + o(x^2),$$

ce qui prouve que f admet un DL d'ordre 2 en 0.