

Feuille d'exercices 12

Matrices et systèmes linéaires

— **Exercice 1** ●○○ — **Systèmes 2×2 à paramètres** Résoudre le système suivant (on discutera selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

— **Exercice 2** ●○○ — **Systèmes 3×3** Résoudre les systèmes suivants (on donnera la nature géométrique des solutions)

$$1. \begin{cases} 5x + y + 2z = 2 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ 4x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + 3y - z = 3 \\ 3x + 8y + 2z = 10 \\ -5x - 13y - z = -17 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x + 5y + z = 3 \\ 4x + 9y - 5z = 10 \end{cases}$$

— **Exercice 3** ●○○ — **Système 3×3 à paramètre** Discuter selon la valeur de $t \in \mathbb{R}$ les solutions du systèmes :

$$\begin{cases} (2+t)x + 2y - z = 0 \\ 2x + (t-1)y + 2z = 0 \\ -x + 2y + (2+t)z = 0 \end{cases}$$

— **Exercice 4** ●○○ — **Systèmes 4×3 dans \mathbb{C}** Résoudre le système suivant, dans \mathbb{C} :

$$\begin{cases} x + iy - 2z = -6 + 8i \\ -3x - y - z = 0 \\ ix - y + z = 3 - i \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

— **Exercice 5** ●○○ — **Matrices qui commutent** Trouver l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

— **Exercice 6** ●●○ — **Deux visions des rotations** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on introduit la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On se donne deux réels θ et θ' .

1. Calculer $R_\theta R_{\theta'}$. Cette matrice est-elle égale à $R_{\theta'} R_\theta$?
2. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, en déduire R_θ^n .
3. Justifier que R_θ est inversible et donner son inverse.
4. Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, donner $(R_\theta^{-1})^n$ (que l'on peut noter R_θ^{-n}).
5. Soit une colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = R_\theta X$, que l'on écrit $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Calculer x' et y' en fonction de x et y .
6. On considère la transformation complexe (c'est-à-dire la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C}) définie par $f : z \mapsto e^{i\theta} z$.
 - a. Rappeler la nature de cette transformation
 - b. Si $z = x + iy$, on écrit $f(z) = x' + iy'$. Exprimer (x', y') en fonction de (x, y) .
 - c. Conclusion ?

— **Exercice 7** ●●○ — **Une décomposition déjà vue...**

1. Soit $N = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer à la main deux matrices $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ tels que $N = S + A$.
2.
 - a. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ quelconque. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tels que $M = S + A$. On raisonnera par analyse-synthèse afin d'exprimer ces deux matrices en fonction de M .
 - b. Montrer l'unicité de ces deux matrices.

— **Exercice 8** ●●○ — **Une équation matricielle** Déterminer les matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $A^2 = A$.

— **Exercice 9** ●○○ — **Systèmes 3×3 à paramètres** Discuter en fonction des paramètres (m, p, q) de la compatibilité du système suivant, et le cas échéant, le résoudre :

$$\begin{cases} x + 2y - z = m \\ 2x - 3y + z = p \\ x + 9y - 4z = q \end{cases}$$

— **Exercice 10** ●●○ — **Systèmes 4×4** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ x - 3y - 8z - t = -4 \\ 3x - y - 4z + 5t = -2 \\ 5x - 3y - 10z + 7t = -5 \end{cases}$$

Mettre le système sous forme matricielle. Appliquer l'algorithme du pivot afin d'obtenir un système triangulaire (échelonné). Le résoudre.

— **Exercice 11** ●●○ — **Système de 3 équations à 4 inconnues** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x - y - z + t = 2 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x + 3z = 9 \end{cases}$$

Mettre le système sous forme matricielle. Appliquer l'algorithme du pivot afin d'obtenir un système triangulaire (échelonné). Le résoudre.

— **Exercice 12** ●●○ — **Système à paramètre** Résoudre en fonction de m :

$$1. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + my + m^2z = 0 \\ mx + y + mz = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x + 3y = -2m \\ -3x - 4y = 1 \\ mx + y = 1 \\ -4x - 5my = 0 \end{cases}$$

— **Exercice 13** ●●● — **Un système de taille n** Soient a et b deux réels. considérons le système

$$\begin{cases} ax_1 + b = x_2 \\ ax_2 + b = x_3 \\ \vdots \\ ax_n + b = x_1 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice associée au système.
2. Résoudre le système avec l'algorithme de Gauss (on appliquera les opérations sur la matrice du système pour y voir plus clair).

— **Exercice 14** ●●○ — **Géométrie et systèmes (En attendant le S2)**

1. Les points $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires?
2. Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' , d'équations respectives $2x + 3y - z + 5 = 0$ et $7x - y + z = 4$ ont-ils une intersection non vide? Le cas échéant, la déterminer.

— **Exercice 15** ●○○ — **Interpolation manuelle** Trouver un polynôme de degré 2 qui vérifie :

$$P(-2) = -63 \quad P(4) = -39 \quad \text{et} \quad P(10) = 57.$$

— **Exercice 16** ●●○ — **Calcul de puissances : avec de l'aide** Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Cherchez une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 - 2u_n & 2u_n \\ u_n & -u_n & 1 + u_n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression explicite de A^n .

— **Exercice 17** ●●○ — **Calcul de puissances : avec une décomposition classique**

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire A sous la forme $\alpha I_3 + N$, où N est une matrice triangulaire supérieure avec une diagonale de 0.
2. Calculer les puissances de N .
3. En déduire les puissances de A .

— **Exercice 18** ●● — **Calcul de puissances : avec une décomposition moins**

classique Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire A sous la forme $\alpha I_3 + B$, où B est une matrice dont tous les coefficients sont égaux.
2. Calculer les puissances de B (commencer par relier B^2 et B).
3. En déduire les puissances de A .

— **Exercice 19** ●●● — **Calcul de puissances : à l'intuition** Considérons la

matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer quelques puissances de A , puis pour $n \in \mathbb{N}$, conjecturer une formule pour A^n . Démontrer votre conjecture.

— **Exercice 20** ●○○ — **Inverses de matrice diagonales (vu en cours)**

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
2. Généraliser au cas d'une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$.

— **Exercice 21** ●● — **Inverses de matrice triangulaire**

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.
2. Que pouvez-vous généraliser au cas d'une matrice triangulaire de $M_n(\mathbb{R})$.

— **Exercice 22** ●● — **Calculer l'inverse d'une matrice (exo essentiel)** Nous présentons plusieurs méthodes (qui se valent) pour trouver l'inverse d'une matrice A donnée. Dans tous les cas, il faut éviter de chercher manuellement les coefficients d'une matrice B qui vérifie $AB = I_n$.

Soit donc la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 10 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (L'anti-méthode). Si on cherche les coefficients de $B \in M_3$ qui vérifieraient $AB = I_3$, on obtient un système sur ses coefficients. Combien a-t-on d'équations et d'inconnues? Avez-vous envie de vous lancer?

2. (L'inverse comme solution d'un système).

- a. Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une colonne. Résoudre le système $AX = B$ d'inconnue la colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en fonction de (a, b, c) .
- b. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

3. (En augmentant avec l'identité). Augmenter la matrice avec la matrice I_3 , puis appliquer un algorithme pour transformer la matrice A en I_3 , en répercutant ces transformations sur la matrice I_3 . Conclure.

— **Exercice 23** ●● — **Un outil pour les suites récurrentes linéaires** On considère la suite récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n \\ u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Rappeler la méthode vue dans le chapitre sur les suites et donner l'expression générale de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
2. Le but dans les questions suivantes est de retrouver l'expression de (u_n) par un calcul de puissance de matrice. En particulier, on évitera de se servir de la **question 1**.
 - a. Ecrire X_{n+1} en fonction de u_n et u_{n+1} , puis déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
 - b. En déduire X_n en fonction de A^n et X_0 .
 - c. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{n+1} \cos\left(\frac{n+1}{4}\pi\right) & \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n}{4}\pi\right) \\ \sqrt{2}^{n+2} \cos\left(\frac{n+2}{4}\pi\right) & \sqrt{2}^{n+1} \sin\left(\frac{n+1}{4}\pi\right) \end{pmatrix}.$$

On pourra montrer que $\cos\left(\frac{n+3}{4}\pi\right) = -\sin\left(\frac{n+1}{4}\pi\right)$, et utiliser les formules d'addition.

- d. Retrouver l'expression explicite de (u_n) .

— **Exercice 24 ●●○** — **Et pour un système de suites ?** On considère 3 suites récurrentes définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + z_n \\ z_{n+1} = 3z_n \\ x_0 = 10, y_0 = 15 \text{ et } z_0 = 20 \end{cases} .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la colonne $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Mettre le système sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, où $A \in M_3(\mathbb{R})$ est à déterminer.
2. En vous inspirant des exercices précédents, trouver l'expression générale des suites.

— **Exercice 25 ●●○** — **Inverse d'une matrice 2×2 à paramètre** Ecrire la matrice associée au système de l'exercice 1. Pour quelle valeur de m est-elle inversible ? Donner son inverse le cas échéant.