# Feuille d'exercices 10
# Dérivabilité

**Exercice 1** ●○○ **Vrai ou faux ?** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, en citant le cours (ou en faisant une preuve), ou en exhibant un contre-exemple :

1. Si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire, alors sa dérivée est impaire.
2. Si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ a sa dérivée paire, alors elle est impaire.
3. Si une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée est continue.
4. Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet une tangente horizontale en un extremum.
5. Sur un intervalle $[a, b]$, si une fonction dérivable admet un maximum, alors sa dérivée s'annule en ce point.

**Exercice 2** ●○○ **Une fonction auxiliaire** Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e\ln(x) - x$.

1. Etudier les variations de $f$.
2. En déduire une comparaison entre $\pi^e$ et $e^\pi$.

**Exercice 3** ●○○ **Une famille de fonction (ENAC 2023)** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions $f_\lambda$ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 aux fonctions $f_\lambda$ sont concourrantes.

**Exercice 4** ●○○ **Régularité** Etudier la « régularité » des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition (c'est-à-dire jusqu'où va leur régularité dans les différentes notions de continuité et de dérivabilité) :

1. $x \mapsto \sqrt{-x^2+x+6}$ (préciser l'ensemble de définition).
2. $x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ (on se contentera de la continuité).
3. $x \mapsto x\sqrt{|x|}$.

**Exercice 5** ●●○ **Définie par morceaux** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ be^{bx} - (c+12)x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner une CNS pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une CNS pour que $f$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 6** ●○○ **Formule de Leinbitz et astuce** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la dérivée $n$-ième de la fonction $x \mapsto x^4e^{5x}$.

**Exercice 7** ●●● **Une fonction plate qui décolle** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que $f$ est $C^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme $P_n$ et un entier $q_n \in \mathbb{N}$ tel que la dérivée $n$-ième de $f$ est de la forme

$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{q_n}}e^{-\frac{1}{x}}.$$

2. En déduire que la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner ses dérivées en 0.

**Exercice 8** ●●○ **Valeur absolue d'une fonction** Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.

1. Montrer que si $f(a) \neq 0$, la fonction $|f|$ est dérivable en $a$.
2. On suppose que $f(a) = 0$. A l'aide d'un développement limité en 0, montrer que $|f|$ admet des dérivées à gauche et à droite en 0, et dire si $|f|$ est dérivable en 0 (on distinguera les cas selon la valeur de $f'(a)$).
3. En déduire une CNS pour que $|f|$ soit dérivable en $a$.

**Exercice 9 ●●○ Une forme indeterminée** Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$. Déterminer

$$\lim_{x\to a} \frac{af(x) - xf(a)}{x-a}.$$

**Exercice 10 ●●○ Inverser une fonction** Soit la fonction $f$ définie sur $[-1,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \ \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $[-1,1]$.
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1(]-1,1[\backslash\{0\})$ et déterminer $f'$ sur $]-1,1[\backslash\{0\}$.
3. Montrer que $f$ est $\mathscr{C}^1(]-1,1[)$, et donner $f'(0)$.
4. Etablir les variations de $f$ sur $[-1,1]$. montrer que $f$ établit une bijection sur un ensemble $J$ à préciser.
5. Montrer que $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(J)$, et déterminer $(f^{-1})'$.

**Exercice 11 ●●○ Un encadrement du logarithme** Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

En déduire un encadrement de $\ln(1,01)$.

**Exercice 12 ●○○ Des propriétés pour $f'$** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et dérivable sur $]0,1[$ telle que

$$f(0) = 0 \ \text{ et } \ \forall x \in ]0,1], \ f'(x) \neq 0.$$

1. Montrer que pour $x \neq 0$, on a $f(x) \neq 0$.
2. Montrer que $f$ garde un signe constant sur $]0,1[$.

**Exercice 13 ●●● Couper l'exponentielle** Pour un polynôme $P$ donné, on s'intéresse à l'équation $P(x) = e^x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier le cas où $P$ est une fonction affine.
2. Montrer par récurrence que l'équation a au plus $n+1$ solutions, où $n$ est le degré de $P$ (pour l'hérédité, on pourra supposer par l'absurde que l'équation $P(x) = e^x$ avec $P$ de degré $n+1$ admet au moins $n+3$ solutions).

**Exercice 14 ●●○ Une histoire de corde** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = f(1) = f'(0) = 0.$$

On veut montrer qu'il existe $c \in ]0,1[$ tel que la tangente à la courbe de $f$ en $c$ passe par l'origine.

1. Traduire le problème par une équation sur $c$.
2. Démontrer le résultat, en étudiant la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 \ \text{si} & x = 0 \end{cases}.$$

**Exercice 15 ●●○ Extension de Rolles : se ramener à un segment**

1. Soit $f : [a,+\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a).$$

   a. On souhaite définir la fonction $g$ sur $]0,1]$ par $g(x) = f(\frac{1}{x} + a - 1)$. Vérifier que cette fonction est bien définie et dérivable. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0.

   b. En déduire qu'il existe $c \in ]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. Quelle est l'idée derrière la fonction $g$ ?

2. On suppose maintenant que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$, avec

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

   En introduisant une fonction basée sur le changement de variable $x = \tan t$, avec $x \in \mathbb{R}$, montrer avec des idées similaires que $f'$ s'annule en au moins un point.

**Exercice 16 ●●○ Relation de récurrence**

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4}\ln(u_n), \ n \geqslant 0 \\ u_0 = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [3,4]$.
2. Introduire une fonction $f$ de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$, et montrer que $f$ possède un unique point fixe, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$, dans l'intervalle $[3,4]$. On note $\alpha$ ce point fixe.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{12}|u_n - \alpha|.$$

4. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$