Chapitre 5 - Les nombres complexes II : Résolution d'équations

Dans ce chapitre, on montre comment les nombres complexes permettent de résoudre des équations polynomiales de degré 2, y compris à coefficients complexes. On détermine aussi les solutions de l'équation $X^n = 1$, appelées racines n-ième de l'unité, en exhibant un lien fort avec la géométrie dans le plan complexe.

Nos objectif sont surtout d'acquérir des méthodes de calculs efficaces afin de :

- Résoudre l'équation à coefficients réels $aX^2 + bX + c = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{C}$, y compris lorsque le discriminant est négatif. Maîtriser la forme canonique d'un trinôme sera vitale pour la suite de l'année.
- Relier les coefficients avec les "sommes et produits" des racines, en particulier pour trouver rapidement des solutions.
- Résoudre l'équation $z^2 = \omega$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ pour un nombre complexe ω donné. En déduire les solutions de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ lorsque les coefficients sont complexes.
- Ne jamais écrire $\sqrt{z}$ si z n'est pas dans $[0, +\infty[$. Ne pas foncer sur le discriminant si on peut l'éviter.
- Résoudre l'équations $z^n = 1$ (voire $z^n = \omega$) et représenter les solutions dans le plan complexe.

1 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré

1.1 Avec des coefficients réels

Théorème 1 - Résolution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$. Soit a, b, c trois réels avec a non nul.

- On appelle *discriminant* du trinôme du second degré $aX^2 + bX + c$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Le signe de ce dernier dicte le nombre et la nature des solutions de l'équation

$$(E) : aX^2 + bX + c = 0.$$

Précisément :

⋆ si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux racines réelles distinctes $x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;

⋆ si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$;

⋆ si $\Delta < 0$, l'équation (E) admet deux racines complexes distinctes conjuguées $x_\pm = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration. ... ■

✎ **En pratique** ✎ On retiendra de la démonstration la forme dite canonique

$$aX^2 + bX + c = a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

qui permet d'étudier très facilement le trinôme (extremum, racines, etc...). Il vaut mieux savoir la retrouver "en détectant une identité remarquable" (voir prise de notes) qu'apprendre cette horrible formule.

Exemple 2 Déterminer les deux solutions de l'équation $X^2 + X + 1 = 0$. Donner également la forme canonique de ce trinôme, sans passer par les formules.

Théorème 3 - Système somme-produit. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Les solutions du système *somme-produit* $\left\{\begin{array}{l} x+y=a \\ xy=b \end{array}\right.$, d'inconnues $x, y \in \mathbb{C}$, sont les deux solutions (éventuellement égales) de l'équation $X^2 - aX + b = 0$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $(X-x)(X-y) = X^2 - (x+y)X + xy$. ■

Exemple 4 Les solutions du système $\left\{\begin{array}{l} x+y=-1 \\ xy=1 \end{array}\right.$, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, sont les couples

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).$$

En effet, les solutions du système en jeu sont liées aux racines du trinôme $X^2 - (-1)X + 1 = X^2 + X + 1$, calculées à l'exemple précédent.

✎ **En pratique** ✎ Plus généralement, si $x_\pm$ sont les deux racines (complexes) d'un trinôme $aX^2 + bX + c$, avec $a \neq 0$, alors

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_+)(X - x_-) = aX^2 - a(x_+ + x_-)X + ax_+x_-.$$

Ainsi la somme des racines vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$, ce qui offre une méthode rapide de vérification des calculs de racines. Cela permet aussi de chercher rapidement des solutions entières, *quand il y en a.*
Par exemple, trouver sans calculs les solutions de $X^2 - 5X + 6 = 0$.

1.2 Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients complexes

Lemme 5 - RacineS carrées d'un nombre complexe non nul. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^2 = \omega$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, possède exactement DEUX solutions opposées, appelées les *racines carrées de* ω. On peut les calculer en passant par les formes algébriques, ou par la forme exponentielle si on connait la forme exponentielle de ω.

Démonstration. Dans l'énoncé, ω est choisi non nul puisque l'équation $z^2 = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ ne possède évidemment qu'une solution, à savoir 0.

Écrivons ω sous forme algébrique $\omega = a + ib$ et cherchons z sous sa forme algébrique : $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Le ressort de la preuve est donnée par l'équivalence, a priori idiote, $z^2 = \omega \iff z^2 = \omega$ et $|z|^2 = |\omega|$.

La première égalité (complexe) nous donne deux égalités (réelles), et la deuxième nous donne "le troisième ingrédient" :

$$\begin{aligned} z^2 = w \quad &\iff \quad z^2 = w \text{ et } |z|^2 = |w| \quad \iff \quad \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array}\right. \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ &\iff \quad x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}, \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad \text{et} \quad 2xy = b. \end{aligned}$$

On tire alors aisément x et y AU SIGNE PRÈS de ces relations sur x^2 et y^2 et l'égalité $2xy = b$ permet quant à elle de savoir si x et y sont de même signe ou de signes opposés. On obtient finalement deux racines carrées $z = x + iy$ (distinctes) de w, opposées l'une de l'autre.

Si on connait la forme exponentielle de ω : $\omega = re^{i\theta}$ d'un complexe ω, avec $\theta \in]-\pi, \pi]$, alors ses racines carrées sont : $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. ■

✖ **ATTENTION !** ✖ La notation $\sqrt{z}$ est rigoureusement INTERDITE pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$.
Cette interdiction provient de notre incapacité à choisir ! En effet, tout nombre complexe non nul a DEUX racines carrées distinctes. Il n'y a que dans le cas réels positifs où l'on sait choisir, puisque les deux racines carrées d'un réel positif x sont alors toutes les deux réelles, l'une positive, l'autre négative, et on choisit de noter $\sqrt{x}$ la première.

✎ **En pratique** ✎ La démonstration du théorème précédent est constructive et permet en pratique d'obtenir les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul, en passant par la forme algébrique. Il faut donc la retenir.

Notons qu'on peut aussi exploiter la forme trigonométrique-exponentielle $\omega = re^{i\theta}$ d'un complexe ω, avec $\theta \in]-\pi, \pi]$, pour trouver ses racines sous la même forme : $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$. On peut imaginer qu'on a écrit $\pm(re^{i\theta})^{1/2}$, ce qui bien sûr n'a aucun sens rigoureux. Très efficace si on connait la forme trigo de ω !

Ce sera à vous de choisir la méthode selon le contexte.

Exemple 6 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$9, \quad -9, \quad -98, \quad 24+10i.$$

Exemple 7 Déterminer les racines carrées de $1+i$ en passant par sa forme trigonométrique.

Exemple 8 Etant donné $z \in \mathbb{C}$, représenter dans le plan complexe les racines carrées de z en distinguant les cas $|z| < 1$, $|z| = 1$ et $|z| > 1$.

Nous sommes à présent capables de résoudre TOUTES les équations du second degré à COEFFICIENTS COMPLEXES.

Théorème 9 - Équation du second degré à coefficients complexes. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sont $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$, où δ est l'une quelconque des deux racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$.

Remarque 10

- Ce résultat généralise celui du théorème 1, au cas où le discriminant $b^2 - 4ac$ est un complexe quelconque. Sa démonstration est identique, *mutatis mutandis*, à celle du cas $\Delta > 0$.
- Le théorème 3 reste évidemment valable lorsque a et b sont complexes.

Exemple 11 Déterminer les solutions de l'équation $z^2 - (3+i)z + 2 + i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

✖ **ATTENTION !** ✖ Ne pas se précipiter sur le calcul du discriminant, par exemple si l'équation ne le nécessite pas :

$$z^2 - 24 = 0, \quad z^2 - z = 0, \quad z^2 + 1 = 0$$

ou bien si on peut éviter les calculs en identifiant la somme et le produit des racines :

$$z^2 - (2+i)z + (1+i) = 0.$$

On prendra par ailleurs soin de vérifier ses résultats en retrouvant la somme et le produit des racines dans les coefficients, ce qui ne coûte pas grand chose.

2 Racines n^{es}

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappelons que la fonction racines n^{e} est la réciproque de la fonction puissance n^{e} sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \qquad y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n.}$$

Pour définir cette fonction, il est essentiel de manipuler des nombres positifs.
Voyons maintenant que la situation diffère sur $\mathbb{C}$.

Définition 12 - Racines n^{es} . Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- On appelle *racine n^e de ω* tout nombre complexe z solution de l'équation $z^n = \omega$.
- (Cas $\omega = 1$). Les racines n^{es} de 1 sont dites *racines n^{es} de l'unité*. Leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Autrement dit, pour un $\omega \in \mathbb{C}$ donné, les racines n^{e} de ω sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équations $z^n - \omega = 0$, tandis que les racines n^{es} de l'unité vérifient $z^n = 1$.

✖ **Attention !** ✖ Il est formellement interdit d'écrire $\sqrt[n]{z}$ pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$, dans la mesure où il n'y a pas unicité des racines n^{es} d'un nombre complexe non nul, comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 13 - Expression des racines n^{es} . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La seule racine n^{e} de 0 est 0.
- **Cas particulier des racines n^{es} de l'unité.** L'équation $z^n = 1$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, possède n solutions :

$$\text{L'ensemble des racines } n^{\text{e}} \text{ de l'unité } : \mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{2ik\pi/n},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}.$$

- Soit $\omega = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$ non nul sous forme trigonométrique. Alors ω possède exactement n racines n^{es} . Pour les calculer on procède en deux étapes :
  - ⋆ On donne une racine particulière : $z_0 = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\theta}{n}\right)$,
  - ⋆ L'ensemble des racine se déduit en multipliant z_0 par les racines de l'unité : ce sont les nombres complexes

$$z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right), \text{ avec } \quad k \in [\![0\,,n-1]\!]$$

Démonstration. Le cas de 0 est clair. Pour le reste, commençons par traiter le cas des racines de l'unité, le cas général s'en déduisant.

- **Racine n^{es} de l'unité.** On résout $z^n = 1$ en cherchant z sous forme trigonométrique. Posons $\rho = |z|$ et notons φ l'unique argument de z dans l'intervalle $[0\,,2\pi[$. Par identification des formes trigonométriques,

$$\begin{aligned}
& z^n = 1 \\
\iff\ & \rho^n\,\mathrm{e}^{in\varphi} = 1\,\mathrm{e}^{i0} \\
\iff\ & \rho^n = 1 \text{ et } n\varphi \equiv 0\,[2\pi] \\
\underset{\rho \in \mathbb{R}_+}{\iff}\ & \rho = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z},\quad n\varphi = 2k\pi \\
\iff\ & \rho = 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z},\quad \varphi = \frac{2k\pi}{n} \\
\underset{\varphi \in [0,2\pi[}{\iff}\ & \rho = 1 \text{ et } \exists k \in [\![0\,,n-1]\!],\quad \varphi = \frac{2k\pi}{n} \\
\iff\ & \exists k \in [\![0\,,n-1]\!],\quad z = \mathrm{e}^{2ik\pi/n},
\end{aligned}$$

ce qui donne bien n racines n^{es} de l'unité, car il y a n entiers entre 0 et $n-1$, et les nombres $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ sont bien disctincts pour $k \in [\![0\,,n-1]\!]$.

- **Cas général.** Soit $\omega \in \mathbb{C}$ non nul, que l'on écrit sous forme trigonométrique : $\omega = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$.
On commence par chercher une solution particulière. Posons $z_0 = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\theta/n}$.
Il est immédiat que $z_0^n = \omega$ et z_0 est non nul, puisque ω l'est. On va déduire de cette racine n^{e} initiale de ω les autres : pour tout $\omega \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
& z^n = \omega \\
\iff\ & z^n = z_0^n \\
\underset{z_0 \neq 0}{\iff}\ & \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\
\iff\ & \exists k \in [\![0\,,n-1]\!],\quad \frac{z}{z_0} = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}
\end{aligned}$$

$$\iff \quad \exists k \in [\![0\,, n-1]\!]\,, \quad z = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}\right).$$

■

✎ En pratique ✎ La formule pour les racines n^{es} de l'unité est à savoir par coeur, elle se retrouve rapidement en les cherchant sous forme exponentielle.
Pour calculer les racines n^{es} d'un nombre complexe ω non nul, on peut retenir les formules ci-dessus, mais il vaut mieux reprendre les étapes de la preuve :

- On met le nombre ω sous forme exponentielle $\omega = re^{i\theta}$.
- On donne une solution particulière $z_0 = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\theta/n}$ (on peut retrouver cette formule en imaginant écrire $(re^{i\theta})^{1/n}$, ce qui n'a aucune rigueur car on ne peut mettre un complexe à la puissance $\frac{1}{n}$).
- On écrit que $z^n = \omega \iff (\frac{z}{z_0})^n = 1$ et donc que $\frac{z}{z_0} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Exemple 14 Déterminer les racines cubiques de $1+i$.

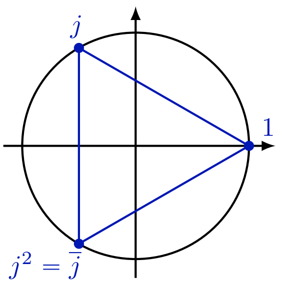
Définition-théorème 15 - Nombre j. On note j le nombre $\mathrm{e}^{2i\pi/3}$ – racine 3ᵉ de l'unité – qui possède les propriétés suivantes :

$$j^3 = 1, \qquad \overline{j} = j^2, \qquad 1 + j + j^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + z + 1 = (z-j)(z-\overline{j}).$$

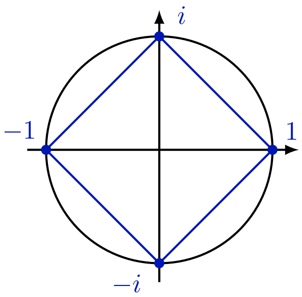
Démonstration. Le vérifier. ■

✖ Attention ! ✖ Il peut arriver en physique que la lettre j serve à désigner... le nombre complexe i ! C'est souvent le cas en électricité, voyez-vous pourquoi ?

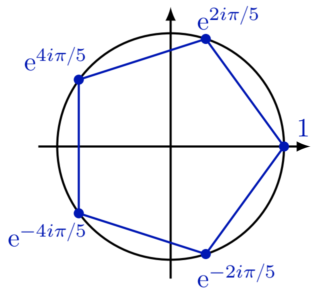
Géométriquement, on peut observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n^{es} de l'unité est l'ensemble des sommets du polygone régulier à n côtés, de centre O et passant par le point d'affixe 1.



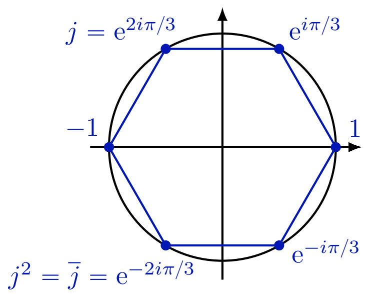
$\mathbb{U}_3$ est l'ensemble des sommets d'un triangle équilatéral.



$\mathbb{U}_4$ est l'ensemble des sommets d'un carré.



$\mathbb{U}_5$ est l'ensemble des sommets d'un pentagone régulier.



$\mathbb{U}_6$ est l'ensemble des sommets d'un hexagone régulier.

Exemple 16 Que vaut la somme des racines n^{e} de l'unité ? Commencer par intuiter la réponse avec un dessin. Ensuite, reconnaître une somme de termes géométrique.