# Chapitre 2 bis - Application des complexes aux équation différentielle d'ordre 2

On commence par un théorème important :

**Théorème 1 - Résolution de l'équation $aX^2 + bX + c = 0$.** Soit $a, b, c$ trois réels avec $a$ non nul.

- On appelle *discriminant* du trinôme du second degré $aX^2 + bX + c$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Le signe de ce dernier dicte le nombre et la nature des solutions de l'équation

$$(E) : aX^2 + bX + c = 0.$$

Précisément :

- ⋆ si $\Delta > 0$, l'équation $(E)$ admet deux racines réelles distinctes $x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ;
- ⋆ si $\Delta = 0$, l'équation $(E)$ admet une racine double réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ ;
- ⋆ si $\Delta < 0$, l'équation $(E)$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées $x_\pm = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

*Démonstration.* ... ■

✎ **En pratique** ✎ On retiendra de la démonstration la forme dite canonique

$$aX^2 + bX + c = a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

qui permet d'étudier très facilement le trinôme (extremum, racines, etc...). Il vaut mieux savoir la retrouver “en détectant une identité remarquable” (voir prise de notes) qu'apprendre cette horrible formule.

**Exemple 2** Déterminer les deux solutions de l'équation $X^2 + X + 1 = 0$. Donner également la forme canonique de ce trinôme, sans passer par les formules.

**Définition 3 - Equation différentielle linéaire, ordre 2.** Soient $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation de la forme

$$y'' + by' + cy = g, \tag{1}$$

où l'inconnue est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$. Une solution de (1) est donc une fonction $f$ dérivable sur $I$ vérifiant

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + bf'(t) + cf(t) = g(t).$$

On appelle équation homogène associée à (1) l'équation différentielle

$$y'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Résoudre une équation homogène d'ordre 2 est déjà plus dur :

**Théorème 4 - Solution de l'équation homogène d'ordre 2.** On appelle équation caractéristique associée à (2) l'équation

$$r^2 + br + c = 0,$$

d'inconnue $r \in \mathbb{R}$. Les solutions de (2) dépendent du discriminant $\Delta = b^2 - 4c$ de l'équation caractéristique :

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux solutions réelles, appelées racines, notées $r_1$ et $r_2$. Les solutions de (2) sont de la forme
$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont deux constantes.
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique n'a pas de solution réelle, mais deux solutions complexes conjuguées :
$$r_1 = \alpha - i\beta \text{ et } r_2 = \alpha + i\beta.$$
On rappelle que $\alpha$ et $\beta$ sont donnés par
$$\alpha = -\frac{b}{2} \quad et \quad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}.$$
Alors les solutions de (2) sont de la même forme, mais avec des exponentielles complexes, et peut déboucher sur une forme « trigo-expo » :
$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} = (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))e^{\alpha t},$$
où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ sont deux constantes, ainsi que $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$. Les formules d'Euler permettent de relier $(A, B)$ et $(\lambda, \mu)$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une seule solution, appelée racine double. Les solutions de (2) sont de la forme
$$y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt},$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ sont deux constantes.

**Exemple 5**

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 5y' - 6y = 0$.
- Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.

✎ **En pratique** ✎ Voilà une compétence transverse entre les maths et la physique. Pour un réel $\omega > 0$ fixé, on doit connaître les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ : ce sont les fonctions

$$y : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

La constante $\omega$ est homogène à une pulsation.
Un signe change tout ! Dans le cas de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$ : ce sont les fonctions $y : t \mapsto Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$, qui ne sont plus périodiques.
Dans le cas d'un terme additionel « en $y'$ », qui vient en général d'une perte d'énergie (frottement, resistance), les solutions ont un facteur $e^{\alpha t}$, avec $\alpha > 0$, ce qui correspond à une décroissance (« amortissement ») des solutions.