Chapitre 22
Applications linéaires en dimension finie : Approche matricielle

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles de nombres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Représentation matricielle d'une application linéaire

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 1 - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1\,,p]\!]$, on note $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

La matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$, est alors appelée *matrice de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}$*.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & & x_j & & x_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ e_1 \\ \\ e_i \\ \\ e_n \end{matrix}$$

Coordonnées de x_j dans $\mathscr{B}$ écrites en colonnes

On connait tout d'un vecteur lorsque l'on dispose de ses coordonnées dans une base, ainsi, plus généralement, on connait tout d'une famille de vecteurs quand on connait sa matrice dans une base. Ramener un vecteur à ses coordonnées ou une famille de vecteurs à sa matrice dans une base, revient à n'en conserver que le squelette numérique. Ainsi, que l'on soit en présence de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, de polynômes, de fonctions, de suites, de matrices, toute information géométrique, *i.e.* vectorielle, peut être « numérisée » matriciellement. La pertinence de ce point de vue apparaîtra lors de l'étude des applications linéaires.

Exemple 2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors, pour tout $x \in E$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ est tout simplement la colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Exemple 3 Si on note $\mathscr{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_4}((1,0,3,1),(2,-1,0,-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

✖ **Attention !** ✖ Il est impératif d'être vigilant à l'ordre des vecteurs de la base et de la famille représentée :

$$\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(3X^2+2X+1, X, X^2-X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{(X^2,X,1)}(3X^2+2X+1, X^2-X, X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4 - Interprétation vectorielle de l'inversibilité, cas des familles de vecteurs.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathscr{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ est inversible.

Démonstration. Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}) = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{X} = (f_1, \dots, f_n)$.
Pour tout $y \in E$, notant $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = {}^{\mathrm{t}}(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$,

$$\begin{aligned}
\exists! X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad Y = AX \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \forall i \in [\![1\,,n]\!]\,, \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) e_i \qquad \text{car } \mathscr{B} \text{ est libre} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j.
\end{aligned}$$

Ces équivalences établissent que le système linéaire $Y = AX$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, possède une et une seule solution si et seulement si le vecteur y est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{X}$ d'une et une seule façon. Ceci étant vrai pour tous les vecteurs $y \in \mathbb{K}^n$, on a démontré que A est inversible si et seulement si $\mathscr{X}$ est une base de E (cf. théorème 56 du chapitre 14). ■

Exemple 5 Montrer que la famille $\left(X^2 + 3X - 1, 2X^2 + X, 2X^2\right)$ est libre.

1.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 6 - Matrice d'une application linéaire dans des bases.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n non nulles, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle *matrice de u dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$* et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ la matrice de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_p))$ dans la base $\mathscr{C}$.

Si $E = F$ et si $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$ est simplement notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} u(e_1) & & u(e_j) & & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_i \\ \\ \leftarrow f_n \end{array}
\end{array}$$

Coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathscr{C}$ écrites en colonnes

Exemple 7 - Un exemple élémentaire mais crucial. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$u : (x, y, z) \longmapsto (x + 2z, 3x + y + 4z, 4y + 5z).$$

Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On connaît tout d'une application linéaire lorsque l'on connaît les valeurs qu'elle prend sur une base, ainsi on connaît tout d'une application linéaire lorsque l'on connaît sa matrice dans deux bases données. Un exercice peut ainsi commencer sans la moindre ambiguïté de la manière suivante :

« On note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. », il convient alors de comprendre que l'endomorphisme en question est $(x, y, z) \overset{u}{\longmapsto} (x+2z, 3x+y+4z, 4y+5z)$, pour lequel en effet $u((1, 0, 0)) = (1, 3, 0)$, $u((0, 1, 0)) = (0, 1, 4)$ et $u((0, 0, 1)) = (2, 4, 5)$.

Exemple 8 - Matrice de l'identité. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.

L'exemple suivant est à savoir par coeur :

Exemple 9 - Matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^2$. Soit R_α la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle α et de centre O (on dit qu'il s'agit d'une rotation vectorielle). On rappelle que R_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Donner la matrice de R_α dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 10 - Matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$. Soit R une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$, caractérisée par un axe et un angle de rotation autour de cet axe. Donner sa matrice dans une base bien choisie.

Exemple 11 - Matrice d'une homothétie. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'étant donné $\lambda \in \mathbb{K}$, l'homothétie de rapport λ est définie comme $h_\lambda : x \longmapsto \lambda x$. Donner sa matrice dans une base quelconque de E.

On vient de voir qu'une application linéaire peut être représentée par une matrice dans des bases fixées au préalable. A l'inverse, on se demande ce que représente une matrice. La réponse est simple et complexe à la fois : une matrice n'est qu'un tableau de nombres, et ne représente rien sans convention. En fait, une matrice peut représenter de nombreuses applications linéaires différentes, et rien n'est clair si on ne sait pas de quels espaces vectoriels on parle, ni quelles bases ont été choisies.

Pourtant, il existe une manière canonique d'associer une application linéaire à une matrice :

Définition 12 - Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'*application linéaire canoniquement associée à la matrice* A est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans les bases canoniques de ces deux espaces vectoriels. Si on identifie $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'application linéaire canoniquement associée à A est définie de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par

$$X \mapsto AX.$$

Exemple 13 - Différentes bases, différentes matrices. Soit φ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, alors $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $\varphi : (x,y) \longmapsto (x, x+y, -x+y)$. Notons en outre $\mathscr{B}_2'$ la famille $((0,1),(1,0))$ et $\mathscr{B}_3'$ la famille $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Ces familles sont des bases respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2',\mathscr{B}_3'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Conclusion naturelle : étant donnée une application linéaire, si l'on change les bases, on change la matrice de représentation !

En effet,

- La famille $\mathscr{B}_2'$ est bien sûr une base de $\mathbb{R}^2$. Idem pour $\mathscr{B}_3'$, par exemple après calcul d'un produit mixte, ou après avoir écrit sa matrice dans la base canonique.
- On a alors

$$\varphi((0,1)) = (0,1,1) = (1,1,1) - (1,0,0) \quad \text{et} \quad \varphi((1,0)) = (1,1,-1) = -(1,1,1) + 2(1,1,0).$$

Les coordonnées de $\varphi((0,1))$ dans $\mathscr{B}_3'$ sont donc $(1,0,-1)$ et celles de $\varphi((1,0))$ sont $(-1,2,0)$, comme annoncé.

Exemple 14 - Une application linéaire chez les polynômes. Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $u(P) = P'$. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Donner sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Donner également sa matrice dans les bases $\mathcal{C} = (2, 2+X, X+3X^2, X+2X+X^3)$ et $\mathcal{B}$.

1.3 Lien entre opérations matricielles et opérations vectorielles

Théorème 15 - Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulle, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. Si l'on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, alors AX est la colonne des coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$. En d'autres termes :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

L'ÉVALUATION pour une application linéaire se traduit matriciellement en termes de PRODUIT et la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ permet d'écrire « numériquement » l'application u. Précisément, pour un vecteur x de E, l'expression de la i^{e} coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est liée à la i^{e} ligne de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, comme l'indique la démonstration qui suit.

Démonstration. Introduisons les vecteurs des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$: $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$. On notera en outre $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$.

$$u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} x_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j\right) f_i,$$

ainsi les coordonnées de $u(x)$ dans $\mathscr{C}$ sont $\left(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{p} a_{nj}x_j\right)$, *i.e.* les coefficients du produit AX. ■

Exemple 16 On considère l'application φ et les bases de l'exemple 13. Déterminer $\varphi((5,2))$ par le calcul matriciel.

Théorème 17 - Un dictionnaire entre les points de vue vectoriel et matriciel sur les applications linéaires.

(i) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles respectives p et n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. L'application $u \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En particulier on a la propriété de linéarité :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + \mu v) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + \mu\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$$

avec des notations évidentes.

(ii) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u).$$

(iii) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de MÊME DIMENSION FINIE NON NULLE, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors u est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$ est inversible. En outre, le cas échéant,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\right)^{-1}.$$

En plus de la linéarité, l'assertion **(i)** résume une propriété de bijectivité déjà mentionnée informellement précédemment : on connaît entièrement u lorsque l'on connaît $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.

L'assertion **(ii)** montre que le PRODUIT est aux matrices ce que la COMPOSITION est aux applications linéaires. Au passage, rappelons que la condition de compatibilité des formats pour le produit de deux matrices impose que le nombre de colonnes de la matrice à gauche doit être égal au nombre de lignes de la matrice à droite et ce nombre commun n'est autre que la dimension de l'espace vectoriel intermédiaire F lors de la composition des applications linéaires associées :

$$\begin{tikzcd} E, \mathscr{B} \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & F, \mathscr{C} \arrow[r, "v"] & G, \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

Démonstration.

(i) Notons $\Phi : u \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$.

- **Linéarité.** Posons $\mathscr{B} = (e_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ et $\mathscr{C} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$.
  Notons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u) = (u_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v) = (v_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\lambda u + \mu v) = (w_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ j \leqslant i \leqslant p}}$. Pour tout $j \in [\![1\,, p]\!]$,

$$(\lambda u + \mu v)(e_j) = \lambda u(e_j) + \mu v(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_{ij} f_i + \mu \sum_{i=1}^{n} v_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda u_{ij} + \mu v_{ij}) f_i.$$

  Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1\,, n]\!] \times [\![1\,, p]\!]$, $w_{ij} = \lambda u_{ij} + \mu v_{ij}$, ce qui correspond à la formule donnant le coefficient d'une combinaison linéaire de matrice, d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\lambda u + \mu v) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u) + \mu\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v)$$

  et Φ est linéaire.
- **Isomorphisme.** Le théorème **??** assure la bijectivité de Φ.

(ii) Posons $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$, $\mathscr{C} = (f_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ et $\mathscr{D} = (g_k)_{1\leqslant k\leqslant r}$.
Notons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u) = (u_{ji})_{\substack{1\leqslant j\leqslant q\\1\leqslant i\leqslant p}}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(v) = (v_{kj})_{\substack{1\leqslant k\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant q}}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(v\circ u) = (w_{ki})_{\substack{1\leqslant k\leqslant r\\1\leqslant i\leqslant p}}$.
On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(v\circ u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(v)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$ dans $\mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ et, pour tout $i \in [\![1\,,p]\!]$,

$$v\circ u(e_i) = v\left(\sum_{j=1}^{q} u_{ji} f_j\right) = \sum_{j=1}^{q} u_{ji} v\,(f_j) = \sum_{j=1}^{q} u_{ji}\left(\sum_{k=1}^{r} v_{kj} g_k\right) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} u_{ji} v_{kj} g_k = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{q} v_{kj} u_{ji}\right) g_k.$$

Ainsi, pour tout $(k,i) \in [\![1\,,r]\!]\times[\![1\,,p]\!]$, $w_{ki} = \sum_{j=1}^{q} v_{kj} u_{ji}$, ce qui correspond à la formule donnant le coefficient d'un produit matriciel, d'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{B}}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}(v)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u).$$

(iii) Si u est bijective et si on pose $n = \dim F$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u^{-1}) \underset{\text{(ii)}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u\circ u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_n$$

et on a de même $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u^{-1})\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u) = I_n$, ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$ est inversible d'inverse $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u^{-1})$.
Réciproquement, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u)$ est inversible, notons, d'après **(i)**, v l'unique application linéaire de F dans E pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v) = A^{-1}$. Dans ces conditions,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v\circ u) \underset{\text{(ii)}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u) = A^{-1}A = I_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

et de même $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u\circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Id}_F)$. Ainsi, d'après **(i)**, $v\circ u = \mathrm{Id}_E$ et $u\circ v = \mathrm{Id}_F$, ce qui établit que u réalise une bijection de E sur F.

■

Exemple 18 - Composer matriciellement. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ définis par

$$u(x,y,z) = (x-2y, -x+z) \quad \text{et} \quad v(x,y) = (x, x+y, x-y, 2y)$$

Déterminez manuellement, et matriciellement, l'application linéaire $v\circ u$. Quelle méthode préférez-vous ?

Exemple 19 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, u^n est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $(x,y,z) \longmapsto (x+ny+n^2z, y+2nz, z)$.

Exemple 20 - Inverser matriciellement. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$u(x,y,z) = (x-z, 2x-3y+z, y-2z)$$

Est-ce un automorphisme (c'est-à-dire un endomorphisme bijectif) ? Si oui, déterminez u^{-1}.

2 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 21 - Noyau, image et rang d'une matrice. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On rappelle que l'application canoniquement associée à M est $u_M : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longmapsto \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $u_M : X \longmapsto MX$. On peut aussi la voir comme une fonction $u_M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. Alors on définit les objets suivants :

(i) Le noyau de M est le noyau de u_M. Il est noté $\ker(M)$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ (avec des notations en colonnes), et $X \in \ker(M)$ si et seulement si X vérifie le système linéaire $MX = 0$.

(ii) L'image de M est l'image de u_M. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ (avec des notations en colonnes), engeandré par les colonnes de M.

(iii) Le rang de M est le rang de u_M. Il s'agit de la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ engeandré par les colonnes de M.

Théorème 22 - Rang d'une application linéaire vs rang d'une matrice. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f))$.

Théorème 23 - Théorème du rang pour une matrice. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on a

$$p = \operatorname{rg}(M) + \dim(\ker(M)).$$

On a en outre :

$$\operatorname{rg}(M) \leqslant \min(n, p).$$

Théorème 24 - Caractérisation des matrices inversibles par le rang, l'image ou le noyau. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La matrice M est inversible,

(ii) On a $\operatorname{rg}(M) = n$,

(iii) On a $\ker(M) = \{0\}$.

(iv) On a $\operatorname{Im}(M) = \mathbb{K}^n$.

Le théorème précédent permet d'établir un résultat intéressant en pratique :

Proposition 25 Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Ainsi, pour savoir si A et B sont inverses l'une de l'autre, il n'est pas nécessaire de prouver $AB = I_n$ et $BA = I_n$, mais une seule de ces deux égalités.

Proposition 26 - Les opérations élémentaires préservent le noyau et l'image.

- Toute opération élémentaire sur les lignes d'une matrice préserve le noyau.
- Toute opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice préserve l'image.

Théorème 27 - Les opérations élémentaires préservent le rang.
Toute opération élémentaire sur les lignes ou les colonnes d'une matrice en préserve le rang.

✎ **En pratique** ✎ **Algorithme du pivot pour le calcul du rang.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'algorithme qui suit, fondé sur celui du pivot, ramène le calcul du rang de A au calcul du rang d'une matrice de taille strictement plus petite, de taille $(n-1)\times(p-1)$. Le procédé doit être ensuite répété à l'identique jusqu'à l'obtention du résultat.

1. Si $A = 0$, alors $\operatorname{rg} A = 0$ – sortie de l'algorithme.
2. Si $n = 1$ ou $p = 1$ et $A \neq 0$, alors $\operatorname{rg} A = 1$ – sortie de l'algorithme.
3. Sinon, au moins un coefficient de A est non nul, disons a, et va pouvoir nous servir de pivot. On le place en position $(1,1)$ via une éventuelle permutation de lignes et/ou de colonnes.
4. À l'aide du pivot a, on annule par des opérations élémentaires sur les lignes tous les coefficients de la première colonne situés sous a.

   Étape facultative : toujours à l'aide du pivot a, on annule par des opérations élémentaires sur les colonnes tous les coefficients de la première ligne situés à droite a.
5. À ce stade, la première colonne de la matrice obtenue est clairement NON combinaison linéaire des autres colonnes. Ainsi la sous-matrice A' obtenue par oubli des premières ligne et colonne de A est de rang $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A - 1$.

L'algorithme ainsi décrit se termine avec certitude car A' est strictement plus petite en taille que A.

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix}}_{\text{Étape 3.}} = \operatorname{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{\text{Étape 4.}} = \operatorname{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}}_{\text{Étape facultative.}} = \underbrace{\operatorname{rg} A' + 1}_{\text{Étape 5.}}$$

✖ **ATTENTION !** ✖ Alors qu'il faut choisir de travailler sur les lignes OU EXCLUSIVEMENT sur les colonnes pour inverser une matrice, via l'algorithme du pivot, on peut ici mélanger les opérations sur les lignes et/ou les colonnes pour le calcul du rang.

Exemple 28

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_4$$

$$= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_1$$

$$= 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 + 2 = 4 \qquad \text{(colonnes non colinéaires).}$$

✎ **En pratique** ✎ En particulier, une matrice carrée est inversible si et seulement si par une suite d'opérations élementaires on peut la transformer en la matrice identité (déjà vu au S1). On trouve la matrice inverse en reportant les opérations effectuées sur la matrice identité.

Théorème 29 - Invariance du rang par transposition. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg}\left(A^T\right) = \operatorname{rg} A$.

Démonstration. Opérer sur les lignes de A^T revient par transposition à opérer sur les colonnes de A et inversement. ∎

En résumé, le rang d'une matrice est égal au rang

- de la famille de ses vecteurs colonnes ;

- de la famille de ses vecteurs lignes (par transposition) ;
- de toute application linéaires qu'elle peut représenter (théorème 23).

On peut l'interpréter commer le nombre de colonnes linéairement indépendantes, mais cette phrase prisée des étudiants est à double tranchant, car elle n'est pas rigoureuse et ne permet pas de calcul effectif, en dehors de cas évidents.

✎ **En pratique** ✎ Tout rang d'une application linéaire/d'une famille de vecteurs peut donc être calculé comme le rang d'une matrice grâce à l'algorithme du pivot.

Exemple 30 - Un exemple chez les polynômes. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, définie par $u(P) = P''$. Déterminer le rang de u et la dimension du noyau par le calcul maticiel. Retrouvez le résultat manuellement.

3 Changement de bases

Définition 31 - Matrice de passage. Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Alors la matrice

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'),$$

dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$, est appelée matrice de passage depuis la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$. Il est pertinent de remarquer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}).$$

Proposition 32 - Matrice de passage. Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et P la matrice de passage depuis la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$. Alors P est inversible, et P^{-1} est la matrice de passage depuis la base $\mathscr{B}'$ vers $\mathscr{B}$. Autrement dit

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = I_n.$$

Théorème 33 - Changement de coordonnées pour un vecteur. Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et P la matrice de passage depuis la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$. Alors pour tout vecteur $x \in E$, si on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, on a

$$X = PX'.$$

✖ **Attention !** ✖ La formule n'est pas dans le sens de lecture attendu. Pour la comprendre, on peut retenir que

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)}_{X} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id})}_{P} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)}_{X'}$$

Exemple 34 - Changement de base chez les polynômes.

1. Soient $\mathcal{B} = (1+X, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1+X^2, X+X^2, X+2)$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $Q = \alpha(1+X^2) + \beta(X + X^2) + \gamma(X+2)$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$ exprimé dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $Q = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$.

Théorème 35 - Changement de coordonnées pour une application linéaire. Soit E un espace vectoriel muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et F un autre espace vecoriel, muni de deux autres bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Soit P la matrice de passage depuis la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$ et Q la matrice de passage depuis la base $\mathscr{C}$ vers la base $\mathscr{C}'$. Alors pour toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$, si on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$, on a

$$B = Q^{-1}AP.$$

Dans le cas particulier d'un endomorphisme, où $E = F$, et où $\mathscr{C} = \mathscr{B}$ et $\mathscr{C}' = \mathscr{B}'$, cette formule prend la forme

$$B = P^{-1}AP.$$

On peut retenir :

Théorème 36 - Matrices semblables. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$B = P^{-1}AP.$$

Alors les matrices A et B sont dites *semblables*. De plus, elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Exemple 37 - Un exemple prometteur : la diagonalisation. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit la base $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2, -e_1 + e_3)$.

1. Donner la matrice de passage depuis $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et son inverse.
2. Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$. Que notez-vous ? Quel avantage ? Vous verrez l'année prochaine comment trouver par vous-même une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice d'un endomorphisme est diagonale !

4 Lien avec les systèmes linéaires, le retour

On rappelle ce qu'est un système linéaire homogène, et son lien avec les matrices. On se donne $n \times p$ nombres $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, appelés coefficients, et n autres nombres $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, appellés *données* (ou *seconds membres*). On s'intéresse au système de n équations à p inconnues suivants :

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \cdots & +a_{np}x_p & = b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

où les inconnues sont les nombres $(x_j)_{j=1,\ldots,p}$.

Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in M_{n,p}$ et $B = (B_j)_{i=1,\ldots,n}$, et synthétisons les inconnues par le vecteur colonne $X = (x_j)_{j=1,\ldots,p} \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors par la définition du produit matriciel, ce système est équivalent à

$$AX = B, \quad \text{d'inconnue } X \in M_{p,1}(\mathbb{K}).$$

4.1 Le cas homogène

Le système homogène associé à (1) est

$$\left\{\begin{array}{cccc} a_{11}x_1+ & \cdots & +a_{1p}x_p & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \cdots & +a_{np}x_p & = 0 \end{array}\right., \quad \text{ou encore } AX = 0 \tag{2}$$

C'est le cas où les seconds membres sont tous nuls. La proposition suivante est une paraphrase de celle sur les solutions d'une équation homogène, en utilisant le cadre matriciel :

Définition-Proposition 38 - Solution d'un système homogène et noyau de la matrice. Soit le système linéaire homogène (2), que l'on écrit sous la forme $AX = 0$. Alors $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ est solution si et seulement si $X \in \ker(A)$.
On définit le *rang* de ce système comme le rang de la matrice A.
L'ensemble des solutions de (2) est un espace vectoriel de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$, autrement dit :

$$\dim(\ker(A)) = p - \mathrm{rg}(A).$$

Remarque 39 - Rang d'un système et idée d'indépendance. Si on perçoit le rang comme un nombre lié au nombre d'équations indépendantes, on retrouve l'idée que l'ensemble des solutions est de dimension au plus le nombre d'inconnue moins le nombre d'équations indépendants. Attention, le rang de A, c'est aussi le rang de sa transposée, c'est-à-dire que le nombre de colonnes indépendantes entre en jeux.

✎ **En pratique** ✎ En général, on peut même temps déterminer le rang d'un système et le transformer en un système $r$éduit de la forme échelonnée par des opérations élémentaires, en suivant par exemple l'algorithme du pivot de Gauss. Le rang du système est le nombre de lignes non nulles une fois l'alglorithme terminé.

4.2 Système avec second membre

On reprend les notions déjà vues dans le chapitre sur les systèmes linéaires et celui sur les équations linéaires.

Proposition 40 - Solution d'un système homogène et noyau de la matrice. Soit le système linéaire (2), que l'on écrit sous la forme $AX = B$. On rappelle que le système est *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution. Alors le système est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Im}(A)$. Le cas échéant, tout solution est la superposition d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

Définition-Proposition 41 - Système de Cramer. Soit un système linéaire (2) carré, c'est-à-dire avec $p = n$, que l'on écrit sous la forme $AX = B$. Alors le système est dit de Cramer lorsque A est inversible. Le cas échéant, le système a une unique solution, $X = A^{-1}B$.

✖ **ATTENTION !** ✖ L'erreur la plus grave (et tentante) est d'écrire, comme au collège,

$$AX = 0 \iff \dots$$

ce qui est bien sûr faux dans le cadre matriciel. On sait que $X = 0$ est toujours solution, mais il peut y en avoir d'autres, à savoir les éléments du noyau, $\ker(A)$. En revanche, si A est carrée et INVERSIBLE, vous pouvez faire ce raisonnement si tentant :

$$AX = 0 \iff X = 0$$

et

$$AX = B \iff X = A^{-1}B,$$

c'est-à-dire « passer A de l'autre côté ». Mais ce sera souvent impossible, alors prudence sur cette erreur gravissime.

✎ **En pratique** ✎ Dans le cadre d'un système de Cramer, la formule $X = A^{-1}B$ n'a rien de pratique, car il est dur de déterminer A^{-1}, y compris avec l'outil informatique. Il est moins coûteux en calculs de résoudre le système $AX = B$ avec des algorithmes, comme celui du pivot.