Chapitre 19 - Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles de nombres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions et premiers exemples

1.1 Différents types d'applications linéaires

Définition 1 - Application linéaire. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle *application linéaire de E dans F* toute application $f : E \longrightarrow F$ qui préserve les combinaisons linéaires :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.

Cas particulier où $\mathbf{E} = \mathbf{F}$. Une application linéaire de E dans E est aussi appelée un *endomorphisme de E*. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

Cas particulier où $\mathbf{F} = \mathbb{K}$. Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est aussi appelée une *forme linéaire sur E*.

Cas particulier où f est bijective. Une application linéaire bijective de E dans F est aussi appelée un *isomorphisme* de E dans (ou sur) F.

Remarque 2 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Remarquons que : $f(0_E) = f(0_\mathbb{K} \cdot 0_E) = 0_\mathbb{K} \cdot f(0_E) = 0_F$, ainsi $\boxed{f(0_E) = 0_F}$.
- Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $f|_A$ est aussi linéaire sur A, *i.e.* un élément de $\mathscr{L}(A, F)$.
- Par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tous $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E^n$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Exemple 3 - Exemples d'applications linéaires (ou pas). Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. L'application $(x, y) \mapsto (x, x + y, x - 2y)$ de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$.
2. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ fixé, les applications de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $M \longmapsto AM$ et $M \longmapsto MA$ (appelées : multiplications par A).
3. L'application $(x, y) \mapsto x + y + 1$ de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$.
4. Pour un intervalle I fixé, l'application $f \mapsto f'$, de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$. Et de $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$?
5. L'application $x \mapsto \cos(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. L'application $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ de $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$
7. L'application $(x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}$.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 4 - Espace vectoriel des applications linéaires. Soit E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, c'est-à-dire que si f et g sont dans $\mathscr{L}(E,F)$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, alors

$$\lambda f+\mu g\in\mathscr{L}(E,F).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel F^E (cf. théorème 9 du chapitre 16).

- Par définition, $\mathscr{L}(E,F)\subset F^E$.
- L'application nulle $x\in E\longmapsto 0_F$ est clairement linéaire.
- Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ et $f,g\in\mathscr{L}(E,F)$. Pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ et $x,y\in E$,

$$\begin{aligned}(\lambda f+\mu g)(\alpha x+\beta y)&=\lambda f(\alpha x+\beta y)+\mu g(\alpha x+\beta y) && \text{(définition de } \lambda f+\mu g)\\ &=\lambda\left(\alpha f(x)+\beta f(y)\right)+\mu\left(\alpha g(x)+\beta g(y)\right) && \text{(linéarité de } f \text{ et } g)\\ &=\alpha\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)+\beta\left(\lambda f(y)+\mu g(y)\right) && \\ &=\alpha\left(\left(\lambda f+\mu g\right)(x)\right)+\beta\left(\left(\lambda f+\mu g\right)(y)\right) && \text{(définition de } \lambda f+\mu g)\end{aligned}$$

  ainsi $\lambda f+\mu g\in\mathscr{L}(E,F)$.

■

Théorème 5 - Composition d'applications linéaires. Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $g\in\mathscr{L}(F,G)$, alors $g\circ f\in\mathscr{L}(E,G)$.
De plus, l'opération de composition $\circ$ est distributive sur l'addition $+$: pour tous $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, et u,f,g linéaires,

$$u\circ(\lambda f+\mu g)=\lambda(u\circ f)+\mu(u\circ g),\quad\text{et}\quad(\lambda f+\mu g)\circ u=\lambda(f\circ u)+\mu(g\circ u)$$

lorsque les domaines de définitions permettent la composition.
Autrement dit, pour tous $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(F,G)$, les applications

$$\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E,F)&\longrightarrow&\mathscr{L}(E,G)\\ f&\longmapsto&v\circ f\end{array}\right.\qquad\text{et}\qquad\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{L}(F,G)&\longrightarrow&\mathscr{L}(E,G)\\ g&\longmapsto&g\circ u\end{array}\right.$$

sont linéaires.

Démonstration.

(i) Il suffit de vérifier la linéarité de $g\circ f$.

(ii) La première égalité est une conséquence de la linéarité de v, tandis que la seconde égalité est une simple conséquence de la définition de $\lambda g+\lambda' g'$.

■

Exemple 6 Pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : M\longmapsto AM-MA$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
En effet, les applications $M\longmapsto AM$ et $M\longmapsto MA$ sont linéaires, donc φ aussi par différence.

Théorème 7 - Opérations sur les isomorphismes. Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

(i) Composition. Si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G, alors $g\circ f$ est un isomorphisme de E sur G.

(ii) Réciproque. Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Démonstration.

(i) La composée de deux applications bijectives (resp. linéaires) est bijective (resp. linéaire).

(ii) Nous savons que f^{-1} est bijective de F sur E, mais est-elle linéaire ? Pour tous $\lambda,\lambda'\in\mathbb{K}$ et $y,y'\in F$,

$$f^{-1}\left(\lambda y+\lambda' y'\right)=f^{-1}\left(\lambda f\left(f^{-1}(y)\right)+\lambda' f\left(f^{-1}(y')\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(\lambda f^{-1}(y)+\lambda' f^{-1}(y')\right)\right)=\lambda f^{-1}(y)+\lambda' f^{-1}(y')$$

la linéarité est donc assurée pour f^{-1}.

■

Définition 8 - Espaces vectoriels isomorphes. On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme E dans F.

Ainsi, d'après la proposition précédente, la relation entre espaces vectoriels « être isomorphe à » est notamment transitive.

2 Image et noyau

2.1 Image d'un sous-espace vectoriel

La proposition suivante est l'occasion de réviser la notion d'image directe :

Proposition 9 - Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour tout sous-espace vectoriel A de E, l'image $f(A)$ de A par f est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Rappelons que, par définition, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$. Puisque A est un sous-espace vectoriel de E, on a $0_E \in A$ et donc $0_F = f(0_E) \in f(A)$. En outre, soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $y_1, y_2 \in f(A)$, par définition, il existe $x_1, x_2 \in A$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ et

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

par linéarité de f, or $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$ (sous-espace vectoriel), ainsi $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in f(A)$. Au total, $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F. ∎

Pour une application linéaire, cette notion est particulièrement importante lorsque $A = E$:

Définition-théorème 10 - Image d'une application linéaire.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. L'ensemble $\operatorname{Im} f = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé l'*image de* f. On a donc

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

On peut lire la surjectivité de f sur son image :

$$f \text{ est surjective de } E \text{ sur } F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Im} f = F.$$

Exemple 11 L'image de l'endomorphisme $g : (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z)$ de $\mathbb{K}^3$ est le plan d'équation $z = x$. En particulier, $\operatorname{Im} g \neq \mathbb{K}^3$ et g n'est pas surjectif.
En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Im} g &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, \quad (x,y,z) = g((a,b,c)) \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, \quad \begin{cases} a + 2b + c = x \\ 2a + b - c = y \\ a + 2b + c = z \end{cases} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, \quad \begin{cases} a + 2b + c = x & \\ \quad 3b + 3c = 2x - y & L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ \quad 0 = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\iff z = x.
\end{aligned}$$

En effet, si $z \neq x$, le système n'a clairement pas de solution, et si $z = x$, on obtient facilement des solutions en utilisant c comme paramètre.

Théorème 12 - Image d'une famille génératrice. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de E, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(f(x_i)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Démonstration. Notons $X = \{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$\begin{aligned}
f\left(\operatorname{Vect}(X)\right) &= f\left(\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n\right\}\right)\\
&= \left\{ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \;\middle|\; (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n\right\}\\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f\left(x_i\right) \;\middle|\; (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n\right\} && (f \text{ linéaire})\\
&= \operatorname{Vect}\left(\{f(x_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(f(X)\right).
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, $\operatorname{Im} f = f(E) = f\left(\operatorname{Vect}(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right) = \operatorname{Vect}\left(f\left(e_i\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$. ■

✎ **En pratique** ✎ Ce résultat nous dit comment déterminer en pratique $\operatorname{Im} f$: il suffit d'évaluer f sur une base. C'est là toute la force des application linéaire, et ce n'est que le début, car cette idée va revenir en force. Si on compare avec des fonctions quelconques, par exemple une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle on a besoin de tout le graphe pour décrire la fonction, il est impressionnant que l'on puisse comprendre une application linéaire à partir d'un nombre fini de valeurs.

Exemple 13 On note f l'application linéaire $(x, y) \longmapsto (2x + y, 3x + 5y, y)$ de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$. Alors $((2, 3, 0), (1, 5, 1))$ est une base de $\operatorname{Im} f$. En particulier, $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{K}^3$ et f n'est pas surjective.

En effet, la famille $((1, 0), (0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$, ainsi $(f((1, 0)), f((0, 1))) = ((2, 3, 0), (1, 5, 1))$ engendre $\operatorname{Im} f$, d'après le résultat précédent, et cette famille est clairement libre (deux vecteurs non colinéaires). Notamment, $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{K}^3$, puisque $\dim(\operatorname{Im} f) = 2 < 3 = \dim \mathbb{K}^3$.

Exemple 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'image de la dérivation Δ des polynômes sur $\mathbb{K}_n[X]$ est $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

En effet, puisque $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$,

$$\operatorname{Im} \Delta = \operatorname{Vect}\left(\Delta(1), \Delta(X), \ldots, \Delta\left(X^n\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(0, 1, 2X, \ldots, nX^{n-1}\right) = \operatorname{Vect}\left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right) = \mathbb{K}_{n-1}[X].$$

2.2 Noyau d'une application linéaire

Proposition 15 - Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour tout sous-espace vectoriel B de F, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soit B un sous-espace vectoriel de F. Rappelons que, par définition, $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E$. Puisque B est un sous-espace vectoriel de F, on a $f(0_E) = 0_F \in B$ et donc $0_E \in f^{-1}(B)$. En outre, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $x_1, x_2 \in f^{-1}(B)$, par linéarité de f,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \underbrace{f(x_1)}_{\in B} + \lambda_2 \underbrace{f(x_2)}_{\in B} \in B$$

ainsi $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in f^{-1}(B)$. Au total, $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E. ■

Définition-théorème 16 - Noyau d'une application linéaire. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle *noyau de* f et on note $\operatorname{Ker} f$ l'ensemble :

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Il s'agit là d'un sous-espace vectoriel de E.
On peut lire l'injectivité de f sur son noyau :

$$f \text{ est injective sur } E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Ker} f = \{0_E\}.$$

Le noyau de f est l'ensemble des solutions de l'ÉQUATION LINÉAIRE HOMOGÈNE $f(x) = 0_F$, d'inconnue $x \in E$. D'une certaine manière, $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des éléments de E que f ne « voit » pas. En effet, pour tous $x \in E$ et $k \in \operatorname{Ker} f$, $f(x+k) = f(x)$, par linéarité. Ainsi, $\operatorname{Ker} f$ mesure le défaut d'injectivité de f.

Démonstration.

- Supposons f injective et montrons qu'alors $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Puisque $f(0_E) = 0_F$, il nous suffit de montrer l'inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$ et, par injectivité de f, $x = 0_E$.
- Sous l'hypothèse $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, montrons que f est injective. Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors
$$f(x - x') = f(x) - f(x') = 0_F,$$
par linéarité, donc $x - x' \in \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, soit $x - x' = 0_E$ et $x = x'$. ∎

✎ **En pratique** ✎ En tant que sous-espace vectoriel de E, $\operatorname{Ker} f$ contient 0_E. Ainsi, pour établir que f est injective, il suffit de montrer l'INCLUSION $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$, c'est-à-dire

$$f(x) = 0_F \implies x = 0_E.$$

Exemple 17 Soit f l'application linéaire $(x, y, z) \longmapsto (2x + y - z, x - y)$ de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$. Alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, 1, 3))$ et en particulier f n'est pas injective.
En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$,

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \iff f((x, y, z)) = (0, 0) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ z & = & 3x, \end{array} \right.$$

ainsi $\operatorname{Ker} f = \{(x, x, 3x) \mid x \in \mathbb{K}\} = \{x(1, 1, 3) \mid x \in \mathbb{K}\} = \operatorname{Vect}((1, 1, 3))$.

Exemple 18 La dérivation polynomiale $P \overset{\Delta}{\longmapsto} P'$ sur $\mathbb{K}[X]$ a pour noyau $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{K}_0[X]$ et en particulier n'est pas injective.

✎ **En pratique** ✎ Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et A un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\boxed{\operatorname{Ker} f|_A = A \cap \operatorname{Ker} f.}$$

Remarque 19 Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour tout scalaire non nul $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(\lambda f)$, égalité qui découle de l'équivalence

$$f(x) = 0_F \underset{\lambda \neq 0}{\iff} \lambda f(x) = 0_F.$$

Par contre, si $g \in \mathscr{L}(E, F)$ est une autre application linéaire, il n'y a pas de lien directe entre $\ker(f + g)$, $\ker(f)$ et $\ker(g)$.

✎ **En pratique** ✎ Pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$, $\qquad g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g.$

2.3 Rang d'une application linéaire

Définition 20 - Application linéaire de rang fini, rang. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On dit que f est de *rang fini* lorsque $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, et de *rang infini* sinon.
- Si f est de rang fini, on appelle *rang de f*, noté $\operatorname{rg} f$, la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Les notions de rang d'une famille de vecteurs et de rang d'une application linéaire ne sont heureusement pas sans rapport. Dans le cas où E est de dimension finie non nulle et admet $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ pour base, f est de rang fini et

$$\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim\left(\operatorname{Vect}(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}\right) = \operatorname{rg}(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n},$$

en particulier $\operatorname{rg} f \leqslant n = \dim E$. Cette inégalité sera précisée par la formule du rang ci-après.

Remarque 21 Si F est de dimension finie, le rang de toute application linéaire f de E dans F est fini et inférieur ou égal à $\dim F$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

Proposition 22 - Rang d'une composée. Soit E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $\operatorname{rg}(g\circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f))$.

Le résultat suivant peut-être précisé lorsque l'on compose par un isomoprhisme :

Proposition 23 - Invariance du rang par composition par un isomorphisme. Soit E, F, E', F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) Pour tout isomorphisme φ de E' sur E, $\operatorname{rg}(f\circ\varphi) = \operatorname{rg} f$.

(ii) Pour tout isomorphisme ψ de F sur F', $\operatorname{rg}(\psi\circ f) = \operatorname{rg} f$.

Démonstration.

(i) Puisque $\operatorname{Im}\varphi = E$, on a

$$\operatorname{Im}(f\circ\varphi) = f\circ\varphi(E') = f\left(\varphi(E')\right) = f(E) = \operatorname{Im} f,$$

ainsi

$$\operatorname{rg}(f\circ\varphi) = \dim(\operatorname{Im}(f\circ\varphi)) = \dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f.$$

(ii) Observons pour commencer que

$$\operatorname{Im}(\psi\circ f) = \psi\circ f(E) = \psi(f(E)) = \operatorname{Im}\psi|_{f(E)} = \operatorname{Im}\psi|_{\operatorname{Im} f}.$$

En outre, ψ est injective et $\psi|_{\operatorname{Im} f}$ l'est a fortiori, par conséquent $\psi|_{\operatorname{Im} f}$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} f$ sur son image $\operatorname{Im}\psi\circ f$. En particulier

$$\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im}(\psi\circ f)) = \operatorname{rg}(\psi\circ f).$$

■

3 Endomorphismes : spécificités et cas particuliers

3.1 Composer des endomoprhismes

On rappelle qu'un endomorphisme est une application linéaire de E dans E, et que l'on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes.

On rappelle que l'application identité de E, notée Id_E, est définie de E dans E par

$$\operatorname{Id}_E : x \longmapsto x.$$

Définition 24 - Homothétie. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle *homothétie de E de rapport λ* l'application $\lambda\operatorname{Id}_E$, *i.e.* $\begin{cases} E \longrightarrow E, \\ x \longmapsto \lambda x. \end{cases}$ Cette application est un endomorphisme de E.

✎ **En pratique** ✎ Encore du vocabulaire ! Pensez à l'éthymologie pour retenir les noms :

- « Morphisme » : transformation, une opération qui transforme une opération (en une autre...).
- que l'on décline avec « endo » : à l'intérieur (se passe de commentaires) et « iso » : même, vient du fait que deux espaces vectoriels reliés par une bijection ont beaucoup de points communs (points que nous allons développer).
- « Homothétie » : même rapport. Prenez l'exemple d'une homothétie de $\mathbb{R}^2$, il est clair qu'elle conserve les angles entre deux vecteurs.

Dans le cas où $E = F$, on peut composer l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ avec lui-même et adopter les notations conventionnelles suivantes.

Définition 25 - Puissance d'un endomorphisme, polynôme (annulateur) d'endomorphisme.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, n un entier naturel. La *puissance n^e de l'endomorphisme f*, notée f^n, est l'endomorphisme de E défini par

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}, \quad \text{si } n > 0.$$

Exemple 26 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ défini par $f : (x, y) \longmapsto (x+y, 2y)$, alors f^2 et f^3 sont les endomorphismes de $\mathbb{K}^2$ définis par :

$$f^2 : (x, y) \longmapsto f(f((x, y))) = f((x + y, 2y)) = (x + y + 2y, 2(2y)) = (x + 3y, 4y),$$

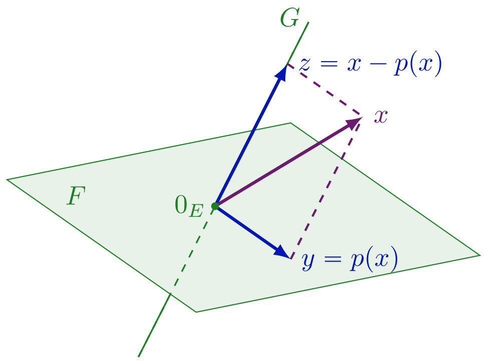
$$f^3 : (x, y) \longmapsto f\left(f^2((x, y))\right) = f((x + 3y, 4y)) = (x + 3y + 4y, 2(4y)) = (x + 7y, 8y)$$

Remarque 27 - Formule du binôme. La formule du binôme est vraie dans $\mathscr{L}(E)$. Précisément, pour deux endomorphismes $f, g \in \mathscr{L}(E)$ qui COMMUTENT,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}.$$

3.2 Projecteurs

Définition 28 - Projecteur. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément $x \in E$ s'écrit alors d'une et une seule façon comme la somme d'un élément $y \in F$ et d'un élément $z \in G$, de sorte que $x = y + z$.
Avec ces notations, l'application p de E dans E qui à x associe $p(x) = y$ est appelée la *projection sur F parallèlement à G* ou encore le *projecteur sur F de direction G*.



Exemple 29 La projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$ parallèlement à la droite $G = \operatorname{Vect}(1,1,1)$ est l'application linéaire $(x,y,z) \longmapsto \frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)$.

En effet, nous allons commencer par établir la supplémentarité de F et G dans $\mathbb{R}^3$, le reste en découlant aisément. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, pour tous $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
& (x,y,z) = (a,b,c) + \lambda(1,1,1) \quad \text{et} \quad (a,b,c) \in F \\
\iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & & & + & \lambda & = & x \\ & & b & & & + & \lambda & = & y \\ & & & & c & + & \lambda & = & z \\ a & + & b & + & c & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rrrrcl} a & & & +\ \lambda & = & x \\ & b & & +\ \lambda & = & y \\ & & c & +\ \lambda & = & z \\ & & & \lambda & = & \frac{1}{3}(x+y+z) \qquad L_4 \leftarrow \frac{1}{3}(L_1+L_2+L_3-L_4) \end{array}\right. \\
\iff & (a,b,c) = \frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z) \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{3}(x+y+z),
\end{aligned}$$

ce qui établit la supplémentarité de F et G dans $\mathbb{R}^3$. Or le projeté de (x,y,z) sur F parallèlement à G est par définition le vecteur (a,b,c) et la projection est donc

$$(x,y,z) \longmapsto \frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z).$$

(A minima, on peut ici vérifier que les coordonnées de $\frac{1}{3}(2x-y-z, -x+2y-z, -x-y+2z)$ satisfont bien l'équation définissant F.)

Théorème 30 - Propriétés des projecteurs.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. La projection p sur F parallèlement à G est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$. En outre,

$$F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\} \qquad \text{et} \qquad G = \operatorname{Ker} p.$$

Autrement dit, $F = \operatorname{Im} p$ est l'espace des vecteurs invariants par p.

Démonstration.

- **Endomorphisme de E.** Par définition, p est à valeurs dans E. Soit $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ et $x, x' \in E$, notons $x = y + z$ et $x' = y' + z'$ avec $y, y' \in F$ et $z, z' \in G$ LES décompositions respectives de x et x' selon la somme directe $E = F \oplus G$. On a alors
$$\lambda x + \lambda' x' = \underbrace{\lambda y + \lambda' y'}_{F} + \underbrace{\lambda z + \lambda' z'}_{\in G}$$
ainsi, par unicité d'une telle écriture et par définition de p,
$$p\left(\lambda x + \lambda' x'\right) = \lambda y + \lambda' y' = \lambda p(x) + \lambda' p(x'),$$
ce qui établit la linéarité de p.
- $\mathbf{p^2 = p}$. Soit $x \in E$ et $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$, alors $p(x) = y = y + 0_E$, avec $y \in F$ et $0_E \in G$, ainsi
$$p^2(x) = p(p(x)) = y = p(x).$$
- **Image et noyau.** Par définition de p,
$$\operatorname{Im} p \subset F \subset \{x \in E \mid p(x) = x\} \subset \operatorname{Im} p$$
et ces inclusions sont donc des égalités. Observons en outre que
$$\{x \in E \mid p(x) = x\} = \{x \in E \mid p(x) - x = 0_E\} = \{x \in E \mid (p - \operatorname{Id}_E)(x) = 0_E\} = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E).$$
On procède de même pour $G = \operatorname{Ker} p$:
$$\operatorname{Ker} p \subset G \subset \{x \in E \mid p(x) = 0_E\} = \operatorname{Ker} p.$$
En effet,
  - ⋆ soit $x \in \operatorname{Ker} p$, alors $x = y + z$ avec $(y,z) \in F \times G$ et $0_E = p(x) = y$, ainsi $x = z \in G$;
  - ⋆ soit $x \in G$, alors $x = 0_E + x$ avec $0_E \in F$ et $x \in G$ et on a donc $p(x) = 0_E$, soit $x \in Kerp$.

■

Théorème 31 - Caractérisation des projecteurs. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un ENDOMORPHISME de E.

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } p^2 = p.$$

Le cas échéant, $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E et p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. Concrètement, pour tout $x \in E$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p}.$$

✖ **ATTENTION !** ✖ On rappelle que $p^2 = p \circ p$. Il ne faut pas omettre de mentionner/vérifier la linéarité de p avant d'utiliser cette caractérisation.

Démonstration. Le sens direct correspond au théorème précédent, ainsi seule la réciproque reste à prouver. Supposons donc que $p^2 = p$ et commençons par montrer par analyse-synthèse que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans E.

- **Analyse.** Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $(a, b) \in \operatorname{Ker} p \times \operatorname{Im} p$ tel que $x = a + b$. Il existe alors $c \in E$ tel que $b = p(c)$ et on a donc
$$b = p(c) = p^2(c) = p\,(p(c)) = p(b) = p(x),$$
puisque, par linéarité de p, $p(x) = p(a) + p(b) = p(b)$. Enfin $a = x - b = x - p(x)$. Ainsi, sous réserve d'existence, a et b sont uniques.
- **Synthèse.** Soit $x \in E$. Posons $a = x - p(x)$ et $b = p(x)$. Par construction $x = a + b$ et $b \in \operatorname{Im} p$. En outre, par linéarité de p et sachant $p^2 = p$,
$$p(a) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_E,$$
soit $a \in \operatorname{Ker} p$.

Nous avons donc établit que $E = \operatorname{Im} p \bigoplus \operatorname{Ker} p$ et obtenue la décomposition correspondante de x :

$$x = p(x) + (x - p(x))\,.$$

Ainsi $p(x)$ est le projeté de x sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$, par définition d'une projection. ■

Exemple 32 - Projecteur sur une droite. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme 1. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\vec{x} \longmapsto (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u}$$

est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Donner son image (et son rang), et son noyau. Est-ce spécifique à $\mathbb{R}^3$?

3.3 Symétries

L'approche pour définir et comprendre les symétries est la même que pour les projecteurs.

Définition 33 - Symétrie. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Tout élément $x \in E$ s'écrit alors d'une et une seule façon comme la somme d'un élément $y \in F$ et d'un élément $z \in G$, de sorte que $x = y + z$.
Avec ces notations, l'application s de E dans E qui à x associe $s(x) = y - z$ est appelée la *symétrie dans la direction G par rapport à F*.

Remarque 34 - Lien entre symétries et projecteurs. Sous les hypothèses précédentes, si on note p_1 le projecteur sur F parallèlement à G et p_2 le projecteur sur G parallèlement à F, alors on a $s = p_1 - p_2$.

De manière très similaire à la caractérisation des projecteurs :

Théorème 35 - Caractérisation des symétries. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et s un ENDOMORPHISME de E.

$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } s^2 = \mathrm{Id}_E.$$

Le cas échéant, $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E et s est la symétrie dans la direction $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$ par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ Concrètement, pour tout $x \in E$

$$x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)}.$$

Exemple 36 - Symétrie depuis un projecteur. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{Id}_E - 2p$ est une symétrie. Donner ses éléments géométriques à partir de ceux de p.
Appliquer cela au cas du projecteur sur une droite décrit dans l'exercice 32.

✖ **ATTENTION !** ✖ Vous êtes à un carrefour de votre compréhension conceptuelle de l'algèbre (et des mathématiques). Nous avons défini les projecteurs et les symétries comme des applications linéaires particulières, mais elles restent des objets très généraux ! Ne croyez pas que tous les projecteurs projettent sur une droite. Par exemple, les applications identité Id_E et nulle $x \mapsto 0_E$ sont elles-aussi des projecteurs !

3.4 Endomorphismes bijectifs

Définition 37 - Automorphismes. Un isomorphisme de E sur E est aussi appelé un *automorphisme de E*. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé le *groupe linéaire* de E.

Exemple 38 L'application $f : (x, y) \longmapsto (3x + y, 5x + 2y)$ est un automorphisme de $\mathbb{K}^2$ et admet pour réciproque $(x, y) \longmapsto (2x - y, -5x + 3y)$.
En effet, on montre sans difficulté que f est linéaire et, pour tous $(a, b), (x, y) \in \mathbb{K}^2$,

$$f((x,y)) = (a,b) \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & + & y & = & a \\ 5x & + & 2y & = & b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcll} 3x & + & y & = & a & \\ -x & & & = & b-2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 2a - b \\ y = -5a + 3b \end{array}\right.$$

ce qui établit la bijectivité de f et l'expression de sa réciproque.

Définition-Proposition 39 - Structure des automorphismes.
- L'application Id_E dans dans $\mathrm{GL}(E)$,
- Pour tout f et g dans $\mathrm{GL}(E)$, on a $g \circ f \in \mathrm{GL}(E)$.
- Pour tout $f \in \mathrm{GL}(E)$, on a $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$.

En particulier pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f^k \in \mathrm{GL}(E)$, où pour un entier $k < 0$, on a posé $f^k = (f^{-1})^k$.

4 Détermination d'une application linéaire en dimension finie.

Sauf mention du contraire, tous les espaces vectoriels vues dans cette section sont de dimension finie.

Pour connaître une application en général, on n'a d'autre choix que de connaître l'ensemble de ses valeurs point par point. Pour une application linéaire en revanche, ce lot considérable d'informations peut être résumé par un nombre restreint de valeurs stratégiques.

Exemple 40 On connaît parfaitement l'application $f : (x, y, z) \longmapsto (2x + y + z, 3x - z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ si l'on sait qu'elle est LINÉAIRE et si l'on sait que $f((1, 0, 0)) = (2, 3)$, $f((0, 1, 0)) = (1, 0)$ et $f((0, 0, 1)) = (1, -1)$.
En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f((x,y,z)) &= f\left(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\right) \\ &= xf\left((1,0,0)\right) + yf\left((0,1,0)\right) + zf\left((0,0,1)\right) && \text{(linéarité)} \\ &= x(2,3) + y(1,0) + z(1,-1) \\ &= (2x + y + z, 3x - z). \end{aligned}$$

Le théorème qui suit, fondamental et impressionnant, généralise ce principe.

Théorème 41 - Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E possède une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, alors, pour toute famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de F, il existe une et une seule application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Pour connaître/définir une application linéaire complètement, il suffit de connaître/définir les valeurs qu'elle prend sur une base de l'espace de départ.

Démonstration. Pour tout $x \in E$, on notera $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E, soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

- **Existence.** Posons
$$u : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i f_i.$$
D'une part, pour tout $j \in [\![1\,,n]\!]$, les coordonnées de e_j dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont $(\delta_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ (symbole de Kronecker), ainsi
$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} f_i = f_j.$$
D'autre part, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$,
$$u(\lambda x+\mu y)=u\left(\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = u\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)\, e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i + \mu y_i)\, f_i = \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i f_i + \mu\sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \lambda u(x)+\mu u(y),$$
ainsi u est linéaire.
- **Unicité.** Soit $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$ telles que, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, $u(e_i) = v(e_i) = f_i$. Alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,
$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \sum_{i=1}^{n} x_i v(e_i) = v\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = v(x),$$
par linéarité de u et v, ainsi $u = v$.

■

Le théorème suivant complète le précédent. Une application linéaire est entièrement caractérisée par les valeurs qu'elle prend sur une base et nous pouvons en tirer une nouvelle caractérisation claire de l'injectivité et de la surjectivité.

Théorème 42 - Caractérisation de l'injectivité/surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose que E possède une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

(i) u est surjective de E sur F si et seulement si $(u(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre F.

(ii) u est injective sur E si et seulement si $(u(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre.

(iii) u est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $(u(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de F.

Démonstration.

(i) Tout simplement $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ (théorème 20.9), ainsi $\operatorname{Im} f = F$ si et seulement si $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre F.

(ii) Supposons f injective et montrons que $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F & \\
\Longrightarrow\ & f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F & (f \text{ linéaire})\\
\Longrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f & \\
\Longrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E & (\operatorname{Ker} f = \{0_E\})\\
\Longrightarrow\ & \forall i \in [\![1\,,n]\!], \quad \lambda_i = 0 & ((e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ libre}).
\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons $(f(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ libre et montrons que f est injective, *i.e.* $\operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ de coordonnées $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ dans $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, alors
$$0_F = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i),$$
et donc, par hypothèse, pour tout $i \in [\![1\,,n]\!]$, $x_i = 0$, soit $x = 0_E$.

(iii) Le point **(iii)** est la synthèse des points **(i)** et **(ii)**.

■

Théorème 43 - Classification des espaces vectoriels de dimension finie.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension finie non nulle n si et seulement s'il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration.

- Sens direct. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Notons $(f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et soit u l'application linéaire déterminée par $u(e_i) = f_i$. D'après le théorème précédent, c'est un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$.
  Notez que si un vecteur $x \in E$ sécrit $x = \sum_i x_i e_i$ avec $(x_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^n$ alors on a $u(x) = (x_1, \dots, x_n)$, cette fonction resurgira quand on représentera les vecteurs par des matrices dans une base donnée.
- La réciproque. Soit $u : \mathbb{K}^n \to E$ un isomorphisme, notons toujours $(f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors la famille $(u(f_1), \dots, u(f_n))$ est une base de E d'après le théorème précédent. Elle a n éléments, d'où $\dim E = n$.

■

Corollaire 44 Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

$$E \text{ est isomorphe à } F \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dim E = \dim F.$$

Exemple 45 La transposition des matrices définit un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. En particulier, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est isomorphe $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, ce qui légitime l'identification de tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ avec une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration.(Faire des diagrammes pour représenter les isomorphismes, voir cours).

- Sens direct. Soit E de dimension n et F de dimension p deux espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ un isomorphsmes. Alors d'après le théorème précédent, il existe $u : E \to \mathbb{K}^n$ et $v : F \to \mathbb{K}^p$ deux isomorphismes. La fonction $v \circ \varphi \circ u^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ est un isomorphisme. D'après le théorème précédent, $\mathbb{K}^p$ (qu'on sait être de dimension p) est de dimension n, d'où $n = p$
- La réciproque. Supposons $\dim E = \dim F$ et notons n cet entier. Alors il existe $u : E \to \mathbb{K}^n$ et $v : F \to \mathbb{K}^n$ deux isomorphismes. La fonction $v^{-1} \circ u : E \to F$ est un isomorphisme.

■

Théorème 46 - Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de MÊME DIMENSION FINIE et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors

$$f \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est injective.}$$

En particulier, ces équivalences valent pour un endomorphisme en dimension FINIE.

Démonstration. Clef : c'est une application du théorème qui dit qu'une famille de E est libre si et seulement elle est génératrice dès lors qu'elle possède $\dim E$ éléments.

Supposons que $\dim E = \dim F$ et notons n cet entier. Montrons que f injective $\Longleftrightarrow$ f surjective. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors

$$\begin{aligned}
& u \quad \text{est injective} \\
\Longleftrightarrow\ & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \quad \text{est libre} \\
\Longleftrightarrow\ & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \quad \text{est génératrice de } F \text{ car } \dim E = \dim F \\
\Longleftrightarrow\ & u \quad \text{est surjective}
\end{aligned}$$

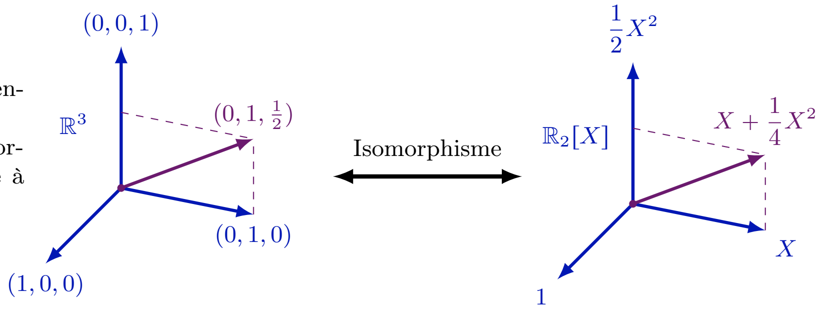
■

✖ **Attention !** ✖ Le théorème précédent ne dit pas que « bijectif = injectif = surjectif » en algèbre linéaire ! Il affirme seulement que ces propriétés se confondent lorsque les espaces vectoriels de départ et d'arrivée ont MÊME DIMENSION FINIE.

✎ **En pratique** ✎ Ce théorème est relié à celui sur les familles libres et génératrices quand le cardinal vaut la dimension, et est tout aussi pratique : il divise par deux le travail à faire pour montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme, à condition que les espaces de départ et d'arrivée aient la même dimension.

Exemple 47 Montrer en un clin d'oeil que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $P \longmapsto \left(P(0), P'(0), \ldots, P^{(n)}(0)\right)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$. On peut montrer que sa réciproque est $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} X^k$ (formule de Taylor polynomiale en 0).

En particulier, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes, *i.e.* « identiques » en tant qu'espaces vectoriels.
La figure ci-contre illustre la manière dont cet isomorphisme « géométrise » l'espace $\mathbb{R}_2[X]$. On y associe à tout triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ le polynôme $a + bX + \frac{c}{2}X^2$.



Exemple 48 Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ fixé. Soit $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites, et S le sous-ensemble de E défini par

$$S = \{(u_n) \in E, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}.$$

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $f : S \to \mathbb{K}^2$ définie par $f((u_n)) = (u_0, u_1)$ est une application linéaire bijective.
3. En déduire la dimension de S.

Exemple 49 - Inversibilité à gauche ou à droite implique inversible. On rappelle que les espaces vectoriels E et F sont supposés de MÊME dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que f a un inverse à gauche, c'est-à-dire qu'il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ vérifiant

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E,$$

Alors f est bijective, et on a $g = f^{-1}$.
On a un résultat similaire si f a un inverse à droite.

L'exemple précédent indique que pour montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme, il suffit de chercher un inverse à gauche ou à droite, sans vérifier l'autre morceau.

Théorème 50 - Dimension d'un espace vectoriel d'applications linéaires. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration.

- Si $\dim E = 0$, alors la seule application linéaire de E dans F est l'application nulle qui envoie 0_E sur 0_F.
Ainsi $\mathscr{L}(E,F) = \left\{0_{\mathscr{L}(E,F)}\right\}$ est de dimension finie et précisément $\dim \mathscr{L}(E,F) = 0 = \dim E \times \dim F$.
- Si $\dim E = n \neq 0$, on peut considérer une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de E. Montrons alors que $\varphi : u \longmapsto (u(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur F^n :
  - ⋆ le théorème 41 équivaut à la bijectivité de φ ;
  - ⋆ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda u + \mu v) &= ((\lambda u + \mu v)(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n} \\ &= (\lambda u(e_i) + \mu v(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n} && \text{(définition de } \cdot \text{ et } + \text{ dans } \mathscr{L}(E,F)) \\ &= \lambda(u(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n} + \mu(v(e_i))_{1\leqslant i\leqslant n} && \text{(définition de } \cdot \text{ et } + \text{ dans } F^n) \\ &= \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v),\end{aligned}$$

  ainsi φ est linéaire.

  Or, F étant de dimension finie, F^n l'est aussi, par produit (théorème 19.16), puis $\mathscr{L}(E,F)$, par isomorphisme (corollaire 20.32). Finalement :

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim(F^n) = n \times \dim F = \dim E \times \dim F.$$

■

Proposition 51 - Recollement d'applications linéaires. Soient E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $E = E_1 \bigoplus E_2$. Soient $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$u_{|E_1} = u_1 \quad \text{et} \quad u_{|E_2} = u_2.$$

Lemme 52 - Théorème du rang, version longue. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si $\operatorname{Ker} f$ possède un supplémentaire H dans E, alors la restriction de f à H est un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$. On dit que f induit un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$.

Démonstration. Notons $g : H \longrightarrow \operatorname{Im} f, x \longmapsto f(x)$ l'application linéaire induite par f entre H et $\operatorname{Im} f$. Montrons que g est un isomorphisme. On a

$$\operatorname{Ker} g = H \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\},$$

puisque H est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, ainsi g est injective. Il reste à établir que g est surjective de H sur $\operatorname{Im} f$. Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, or il existe $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} f \times H$ tel que $x = x_1 + x_2$ et on a donc, par linéarité de f,

$$y = f(x) = f(x_1) + f(x_2) = 0_F + f(x_2) = f(x_2),$$

ainsi $y \in \operatorname{Im} g$, soit $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$, l'inclusion réciproque étant triviale. ∎

Théorème 53 - Théorème (ou Formule) du rang. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Si E est DE DIMENSION FINIE, alors

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg}(f).$$

En particulier, $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$.

L'hypothèse « E est de dimension finie » garantit en particulier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont aussi. Le théorème du rang indique que

Si je connais le noyau, je connais un peu l'image et vice versa.

Démonstration. Puisque E est de dimension fine, $\operatorname{Ker} f$ admet un supplémentaire H dans E (théorème 19.41) et f induit alors un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$, d'après le lemme de factorisation. Par conséquent, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie à l'instar de H (sous-espace vectoriel de E) et

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim H = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} f),$$

puisque H et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E. ∎

Exemple 54 Soit $f : (x, y, z) \longmapsto (x + 2y - z, 2x - y + 8z, x + y + z)$ un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.
Alors $((3, -2, -1))$ et $((1, 2, 1), (2, -1, 1))$ sont des bases respectives de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
En effet,

- **Noyau.** Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$, l'appartenance $(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$ équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 8z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{5}L_1 - \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2z \\ x & = & -3z. \end{array}\right.$$

  Ainsi, $\operatorname{Ker} f = \{(-3z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{K}\} = \operatorname{Vect}((3, -2, -1))$ et on a donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$.
- **Image.** D'après le théorème du rang, $\mathbb{K}^3$ étant de dimension finie, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{K}^3 - \dim(\operatorname{Ker} f) = 2.$$

  Or

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f((1, 0, 0), f((0, 1, 0)), f((0, 0, 1))) = \operatorname{Vect}((1, 2, 1), (2, -1, 1), (-1, 8, 1))$$

  et la famille $((1, 2, 1), (2, -1, 1))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires), elle forme donc une base de $\operatorname{Im} f$.

Exemple 55 Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$. Alors $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

En effet,

- Tout polynôme constant est dans le noyau de Δ. Réciproquement, si $\Delta(P) = 0$, alors $P(X+1) = P(X)$ et on montre par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$. Ainsi, le polynôme $P(X) - P(0)$ admet une infinité de racines (tous les entiers naturels), par suite il est nul et P est constant. Au total $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$.
- D'après la formule du rang, $\mathbb{R}_n[X]$ étant de dimension finie,

$$\operatorname{rg}\Delta = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim(\operatorname{Ker}\Delta) = n + 1 - 1 = n$$

  ainsi l'image de Δ est de dimension n, or elle est clairement incluse dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $P(X+1)$ et $P(X)$ sont de même degré et on même coefficient dominant), également de dimension n, d'où l'égalité.

Ainsi tout polynôme de degré strictement inférieur à n est de la forme $P(X+1) - P(X)$, avec $\deg P \leqslant n$.

Exemple 56 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}\left(f^2\right) \leqslant \dim E.$$

En effet, puisque E est de dimension finie, il en va de même des sous-espaces $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} f$ et

$$f \circ f^2 = f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \forall x \in E,\quad f\left(f^2(x)\right) = 0_E \iff \operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f \implies \operatorname{rg}\left(f^2\right) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} f).$$

Il est alors loisible d'appliquer le théorème du rang à f, dans la mesure où E est de dimension finie, soit

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} f) + \operatorname{rg} f \geqslant \operatorname{rg} f + \operatorname{rg}\left(f^2\right).$$

5 Equations linéaires : lien avec les applications linéaires

Définition 57 - Equation linéaire. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $c \in F$ fixé. On appelle équation linéaire une équation de la forme

$$f(x) = c, \quad \text{d'inconnue } x \in E.$$

Le vecteur c est appelé le second membre.
L'équation homogène associée à cette équation est l'équation linéaire

$$f(x) = 0_F, \quad \text{d'inconnue } x \in E.$$

Exemple 58 Exhiber les espaces vectoriels E et F, ainsi que la fonction f et l'élément c pour le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1, \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

On ne demande pas de résoudre le système.

Exemple 59 Généraliser l'exercice précédent en remplaçant un système linéaire de p équations à n inconnues dans le cadre d'une équation linéaire.

Exemple 60 Soient a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Interpréter les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

comme les solutions d'une équation linéaire. On précisera avec soin les espaces vectoriels en jeu.
Même question pour l'ensemble S des suites de l'exercice 48.

Théorème 61 - Lien entre les solutions et l'équation homogène. Soit une équation linéaire

$$f(x) = c, \tag{1}$$

avec les notations de la définition 57.
Alors :

- L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est $S_0 = \ker(f)$.
- Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1). Alors on a la disjonction de cas suivantes :
  - ⋆ Ou bien $c \in \mathrm{Im}(f)$, et S est non vide. Dans ce cas, soit x_p une solution particulière, alors

    $$S = \{x_p + x_0, x_0 \in \ker(f)\}.$$

  - ⋆ Ou bien $c \notin \mathrm{Im}(f)$, et S est vide.

Remarque 62 - Remise en contexte des solutions d'un système linéaire.

- La notion de système linéaire *compatible* apparaît maintenant claire (voir le chapitre 13 sur les sytèmes linéaires) : on comprend qu'un système peut ne pas avoir de solution lorsque le second membre n'est pas dans l'image de l'application linéaire associée.
- On comprend aussi pourquoi l'ensemble des solutions d'un système linéaire, lorsqu'il est non vide, a des structures prescrites (point, droite, plan, ...) : il s'agit d'un sous-espace vectoriel translaté par une solution particulière.