Chapitre 10 - Dérivabilité

Nos objectifs :

- Revoir la notion de dérivée : pas juste des "formules", mais la limite d'un taux d'accroissement, et la pente de la tangente à une courbe.
- Revoir les règles de calculs, mais aussi justifier qu'une fonction est dérivable (ou pas).
- Lier l'allure (monotonie, points critiques, extrema) d'une fonction à ses dérivées.
- Deux théorèmes de dérivation : le théorème de Rolle, et surtout, les "accroissements finis".

Dans ce chapitre, sauf mention expresse du contraire, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

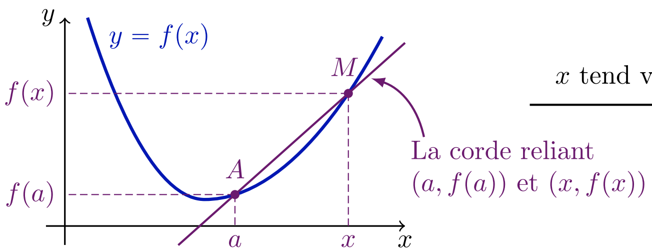
1 Définitions et premières propriétés

1.1 Dérivabilité

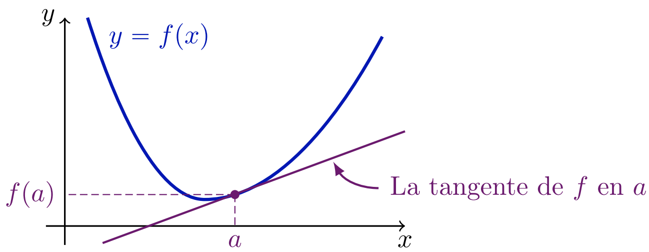
Définition 1 - Dérivabilité en un point/sur un intervalle de $\mathbb{R}$, nombre dérivé, dérivée.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $a \in I$. La fonction f est dite *dérivable en a* lorsque la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ EXISTE ET EST FINIE. Le cas échéant, cette limite est appelé le *nombre dérivé de f en a* et notée $f'(a)$.
- La fonction f est dite *dérivable sur I* lorsque f est dérivable en tout point de I. Le cas échéant, la fonction $x \longmapsto f'(x)$ est appelée la *dérivée de f* et notée f'.

  On note $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles.



x tend vers a $\longrightarrow$



✎ **En pratique** ✎ Dans le taux d'accroissement ci-dessus, la quantité $x-a$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. Si on pose $h = x-a$, de sorte que $x = a+h$, alors le taux d'accroissement en a devient

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

et on a alors

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Ce n'est qu'une nouvelle écriture, mais elle peut-être pratique car on voit bien ce qui est "petit". Il faut s'habituer à jongler avec les deux écritures (sans les mélanger). Dans les deux cas, les quantités h et x sont muettes dans la limite, et le nombre $f'(a)$ ne dépend ni de x ni de h (contrairement au taux d'accroissement).

Interprétation graphique du nombre dérivé (voir graphique ci-dessus). On reprend les notations de la définition 1, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f et A et M les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et x. Le taux d'accroissement de f entre a et x est alors la pente de la droite (AM). Si f est dérivable en a, lorsque x tend vers a, le point M tend vers le point A en se déplaçant sur la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite (AM) se fige alors : c'est la tangente à la courbe. Le nombre $f'(a)$ est alors le coefficient directeur de cette droite.

Définition 2 - Tangente à la courbe. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la *tangente à la courbe de f en a*.
- Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée la *tangente à la courbe de f en a*.

Exercice 3 - Une famille de fonction (ENAC 2023).

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 aux fonctions f_λ sont concourrantes (c'est-à-dire passent toutes par un même point).

Au voisinage de a, la tangente en a ressemble beaucoup à la courbe de f, on dit que la tangente est une *approximation affine* de la courbe de f au voisinage du point d'abscisse a. Ainsi la tangente de f en a est la droite la plus proche de la courbe de f au voisinage de a. Cela est précisé par la proposition suivante, déjà évoquée au chapitre 1 :

Proposition 4 - DL à l'ordre 1. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si il existe une fonction ε, définie au voisinage de 0, telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

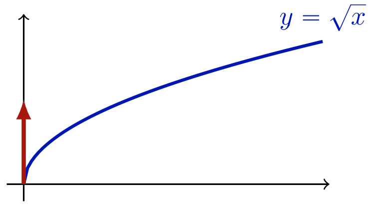
Exemple 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction puissance $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$.

En effet, soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$, $\dfrac{x^n-a^n}{x-a} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} = na^{n-1}$.

Exemple 6 La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 et sa courbe admet une demi-tangente verticale en 0.

En effet, pour tout $h > 0$, le taux d'accroissement entre 0 et $0+h$ est

$$\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$



Exemple 7 La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|-|0|}{x-0} = -1$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|-|0|}{x-0}$ n'existe pas, càd $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Théorème 8 - Lien entre dérivabilité et continuité. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration. Puisque f est dérivable en a, $f(x) = \underbrace{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a)} \times \underbrace{(x-a)}_{\underset{x \to a}{\longrightarrow} 0} + f(a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, par opérations. ■

✖ **Attention !** ✖ La réciproque du résultat précédent est fausse ! Comme l'indique les fonctions racine carrée et valeur absolue qui sont continues et non dérivables en 0 (cf. exemples 6 et 7).†

Proposition 9 - Interprétation cinématique de la dérivée.

✖ **Attention !** ✖ En cinématique, la variable est souvent t, et la fonction (position) peut être x. Soyez prêt !

Soit $x : t \mapsto x(t)$ une fonction définie sur $[0, +\infty[$ décrivant la position d'un solide en mouvement sur un axe. Alors si cette fonction est dérivable, le nombre $x'(t)$ représente la vitesse instantanée du solide à l'instant t.

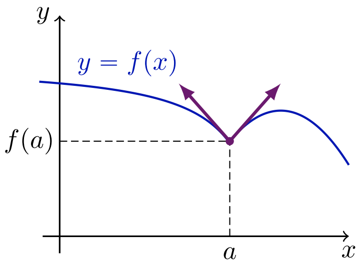
Quand une fonction position serait-elle non dérivable ? Lors d'un choc : la vitesse pourrait varier brusquement. Considérons une balle en caoutchouc roulant sans frottement qu'on envoie rebondir contre un mur. Sa distance au mur peut être modélisée par la fonction valeur absolue.

1.2 Dérivabilité à gauche/à droite

Définition 10 - Dérivabilité à gauche/à droite. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.

- f est dite *dérivable à gauche en a* lorsque $f|_{I\cap]-\infty,a]}$ est dérivable en a, *i.e.* lorsque $\displaystyle\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Le cas échéant, cette limite est appelée le *nombre dérivé à gauche de f en a* et est notée $f'_g(a)$.
- f est dite *dérivable à droite en a* lorsque $f|_{I\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a, *i.e.* lorsque $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Le cas échéant, cette limite est appelée le *nombre dérivé à droite de f en a* et est notée $f'_d(a)$.

Notez que la dérivabilité à gauche (reps. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite).



Ci-contre f est dérivable à gauche et à droite en a, sa courbe admet ainsi des demi-tangentes à gauche et à droite en a, mais pas en a, car $f'_g(a) \neq f'_d(a)$.

Exemple 11 La fonction valeur absolue $v(x) = |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0, puisque $v'_g(0) = -1 \neq 1 = v'_d(0)$.

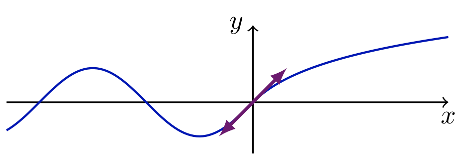
Il existe naturellement un lien entre dérivabilité en a et dérivabilité à gauche et à droite en a, comme le précise l'exercice suivant – résultant naturellement du lien entre limite en a et limite à gauche et à droite en a pour une fonction non définie en a.

Exercice 12 - Caractérisation de la dérivabilité via les dérivabilités à gauche et à droite.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On suppose f définie au voisinage de a à gauche et à droite.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a ET si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Voici une application de cet exercice :

Exemple 13 La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

En effet, $f'_g(0) = 1 = f'_d(0)$, ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.



†. Pire, il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ mais dérivables nulle part ! À l'instar de $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ avec $0 < a < 1$ et $ab \geqslant 1$.

1.3 Opérations sur la dérivabilité

Théorème 14 - Opérations sur la dérivabilité.
Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in I$. On suppose f et g dérivables en a.

(i) Combinaison linéaire. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$. *(Linéarité de la dérivation).*

(ii) Produit. Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iii) Quotient. Si $g(a) \neq 0$, alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in I$.

(iv) Composition. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)\, g'(f(a)).$$

Exemple 15 De l'exemple 5, on déduit par opérations que les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et les fractions rationnelles sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs.

Exemple 16 Montrer (on ne demande pas d'étudier la dérivabilité aux bornes de l'ensemble de définition).

1. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3 \sin x}$ est dérivable sur $]-\pi\,,\pi[$.
2. La fonction $x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right)$ est définie sur $]0\,,1]$ et dérivable sur $]0\,,1[$.

Remarque 17 La règle de dérivation pour une composée de fonctions est primordiale, dans la mesure où elle est à la base de la dérivation des fonctions du type $\sqrt{u}$, e^u, $\ln u$, u^α, ...

Théorème 18 - Dérivabilité d'une réciproque. Soit I un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$. Si f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

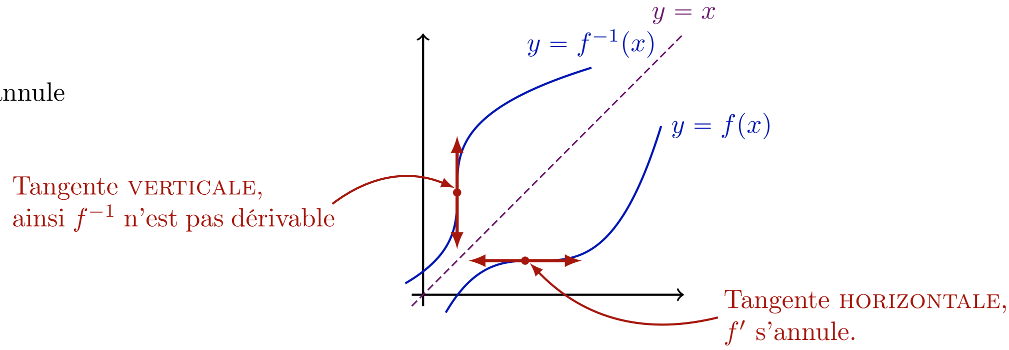
Démonstration. Soit $b \in J$.

- Puisque f est dérivable en $f^{-1}(b)$, $\displaystyle\lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{f(x) - f\left(f^{-1}(b)\right)}{x - f^{-1}(b)} = f'\left(f^{-1}(b)\right)$ et, par passage à l'inverse, f' ne s'annulant pas par hypothèse, $\displaystyle\lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - f\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$.
- En outre, puisque f est continue et bijective, f^{-1} est continue en b, soit $\displaystyle\lim_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$. On a alors, $\displaystyle\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$, par composition des limites.

■

✖ ATTENTION ! ✖

L'hypothèse selon laquelle f' ne s'annule pas est essentielle !



Le théorème de dérivabilité d'une réciproque, que nous avions admis au chapitre 3, permet de justifier la dérivabilité des fonctions racine carrée et arctangente et d'obtenir l'expression de leurs dérivées.

Exemple 19 La fonction carrée f restreinte à $\mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée $f' : x \longmapsto 2x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, en vertu du théorème de dérivabilité d'une réciproque, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sqrt{\cdot}'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Exemple 20 La fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est dérivable et sa dérivée $\tan' = 1 + \tan^2$ ne s'annule pas. Ainsi, en vertu du théorème de dérivabilité d'une réciproque, la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \left(\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\tan' \circ \operatorname{Arctan}(x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Remarque 21 La formule $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ peut être retrouvée rapidement en dérivant la relation $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$:

$$1 = (\mathrm{Id}_J)' = \left(f \circ f^{-1}\right)' = \left(f^{-1}\right)' \times f' \circ f^{-1}.$$

1.4 Montrer qu'une fonction est dérivable (ou pas)

Voici une stratégie pour montrer qu'une fonction est dérivable :

✎ **En pratique** ✎ On pourra appliquer une des méthodes suivantes :

1. Utiliser le catalogue des fonctions usuelles :
   - Reconnaître une somme, un produit, quotient (justifier que le dénominateur ne s'annule pas) ou composée (justifier qu'elle est bien défine) du catalogue des fonctions dérivables
   - Ou au contraire, identifier une valeur interdite pour dériver, parmi le catalogue des fonctions non dérivables, en particulier les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0, ainsi que $x \mapsto \operatorname{Arccos} x$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ en -1 et 1. Pensez aux composées : $x \mapsto |x-1|$ est dérivable en 0 mais pas en 1.
2. Reconnaître une fonction réciproque :
   - Reconnaître la réciproque d'une fonction dérivable DONT LA DERIVEE NE S'ANNULE PAS. Attention, on ne peut pas toujours avoir une formule pour cette réciproque (ou pour sa dérivée).
   - Ou au contraire, tomber sur la réciproque d'une fonction dérivable mais dont la dérivée s'annule : Arcsin ou Arccos en 1 et -1, $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ en 0...
3. Tomber sur une forme indeterminée.
   - Si f' admet des limites au point en jeu, on peut appliquer le théorème 22 ci-dessous.
   - On peut aussi revenir à la définition en formant le taux d'accroissement (voir exemple 24).
   - Les cas les plus extrêmes seront traités plus tard en utilisant des développement limités pour mieux calculer les limites.

Proposition 22 - Théorème de la limite de la dérivée. Soit $a \in I$, ainsi que f continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$

- Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x)$ existe, est finie et vaut ℓ, alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$. En outre f' est continue en a.
- Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a, et sa courbe y possède une tangente verticale.

Ce théorème permet de contourner le calcul de dérivée par taux d'accroissement en un point problématique :

Exemple 23

1. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est dérivable en 0, et donner sa dérivée.
2. Reprendre les fonctions de l'exercice 16, et étudier leur dérivabilité aux bornes de l'ensemble de définition.

✖ **Attention !** ✖ Ne faites pas dire au théorème 22 autre chose : si f' n'admet pas de limite (voir exemple ci-dessous), le théorème ne s'applique pas. En fait, le théorème 22 n'est pas un critère nécessaire pour être dérivable. Il vous faudra être stratégique, et savoir à l'avance s'il vaut mieux chercher la limite de la formule trouvée pour f', ou repasser par le taux d'accroissement.

Voici l'exemple classique où on doit revenir aux taux d'accroissement, à avoir déjà fait :

Exemple 24 Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable en 0, et donner sa dérivée. Que dire de la limite de f' en 0 ?

1.5 Dérivées successives

Définition 25 - Dérivées successives. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On définit les *dérivées successives de f sur I* par récurrence :

$$\begin{cases} f^{(0)} = f, \\ \text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ si } f^{(k)} \text{ est définie et dérivable sur } I, \text{ alors } f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'. \end{cases}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(k)}$, lorsqu'elle est définie, est appelée fonction *dérivée k^e (ou d'ordre k) de f sur I* et la fonction f est dite *k fois dérivable sur I*. En particulier, on note généralement f'', en lieu et place de $f^{(2)}$, la *dérivée seconde de f*.

Définition 26 - Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f est dite *de classe $\mathscr{C}^k$ sur I* lorsque f est k fois dérivable sur I et lorsque $f^{(k)}$ est continue sur I.
  L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I à valeurs réelles est noté $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$. En particulier, $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
- La fonction f est dite *de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I* lorsque f est dérivable autant de fois que l'on veut sur I.
  L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs réelles est noté $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On a donc

$$\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}) =$$

✖ **Attention !** ✖ Être de classe $\mathscr{C}^1$, ce n'est pas être « dérivable et continue »– on est toujours continu lorsque l'on est dérivable – mais être « dérivable de dérivée continue ».

Le lien entre continuité et dérivabilité donne lieu aux implications/inclusions suivantes :

$$\boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^\infty} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^2} \longrightarrow \boxed{\text{Dérivabilité deux fois}} \longrightarrow \boxed{\text{Classe } \mathscr{C}^1} \longrightarrow \boxed{\text{Dérivabilité}} \longrightarrow \boxed{\text{Continuité} = \text{Classe } \mathscr{C}^0}$$

Exemple 27

- Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En outre, si f est une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $p > n$, $f^{(p)} = 0$.
- Les fractions rationnelles (càd les quotients de polynômes) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.
- $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.

Exemple 28 Reprenons la fonction de l'exemple 24 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

À l'instar des fonctions dérivables, on dispose de règles opératoires pour la dérivabilité à l'ordre k.

Théorème 29 - Opérations sur les dérivées successives. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- **Combinaison linéaire.** Pour tous $f, g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ et
$$(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}.$$
Il s'agit à nouveau d'une propriété de linéarité.
- **Produit.** Pour toutes $f, g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, $fg \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}$ (*formule de Leibniz*).
- **Quotient.** Pour toutes $f, g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, si g NE S'ANNULE PAS sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$.
- **Composition.** Si $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$ et si $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$.
- **Réciproque.** Soit I un intervalle. Pour toute $f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I)$, SI f' NE S'ANNULE PAS SUR I, alors $f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$.

On peut remplacer dans chacune de ces assertions « $\mathscr{C}^k$ » par « $\mathscr{D}^k$ » (dérivable k fois) et « $\mathscr{C}^\infty$ » (infiniement dérivable).

Démonstration. Les théorèmes opératoires 14 et 18 se généralisent aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, via les règles opératoires sur la continuité. On raisonne alors par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, l'initialisation étant claire dans chaque cas.

(i) $\mathscr{P}(k)$: « $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}), \quad \lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$, alors $f, g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$. Or $f', g' \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ ainsi, par hypothèse de récurrence, $(\lambda f + \mu g)' \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, *i.e.* $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$. En outre,
$$(\lambda f + \mu g)^{(k+1)} = \left((\lambda f + \mu g)^{(k)}\right)' = \left(\lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}\right)' = \lambda \left(f^{(k)}\right)' + \mu \left(g^{(k)}\right)' = \lambda f^{(k+1)} + \mu g^{(k+1)}.$$

(ii) $\mathscr{P}(k)$: « $\forall f, g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}), \quad fg \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$, alors $f, g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, donc $fg \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$. Or $f'g, fg' \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, par hypothèse de récurrence, ainsi $(fg)' \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, d'après **(i)**, *i.e.* $fg \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$. En outre,
$$(fg)^{(k+1)} = \left((fg)^{(k)}\right)' = \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}\right)' \text{ par hypothèse de récurrence,}$$
Il reste à dériver termes à termes, et conclure avec la formule du triangle de Pascal (voir détails en cours). Notez les similarités avec la preuve de la formule du binôme de Newton.

(iii) $\mathscr{P}(k)$: « $\forall f, g \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}), \quad (\forall x \in I, \quad g(x) \neq 0) \implies \frac{f}{g} \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f, g \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$, g ne s'annulant pas sur I, alors $f, g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, donc $\frac{f}{g} \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. Or $f'g - fg', g^2 \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, d'après **(i)** et **(ii)**, ainsi $\left(\frac{f}{g}\right)' \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, par hypothèse de récurrence, *i.e.* $\frac{f}{g} \in \mathscr{C}^{k+1}(D, \mathbb{R})$.

(iv) $\mathscr{P}(k)$: « $\forall f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}), \quad \forall g \in \mathscr{C}^k(E, \mathbb{R}), \quad f(I) \subset E \implies g \circ f \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^{k+1}(E, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset E$, alors $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(E, \mathbb{R})$, donc $g \circ f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. Or $f' \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, et $g' \circ f \in \mathscr{C}^k(E, \mathbb{R})$ par hypothèse de récurrence, ainsi $(g \circ f)' \in \mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$, par produit, *i.e.* $g \circ f \in \mathscr{C}^{k+1}(I, \mathbb{R})$, par produit.

(v) $\mathscr{P}(k)$: « Pour tout $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$, si f est bijective de I sur $J = f(I)$ et si f' ne s'annule pas sur I, alors$f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J,\mathbb{R})$ ».
Hérédité. On suppose le résultat vrai au rang k. Soit $f \in \mathscr{C}^{k+1}(I,\mathbb{R})$, bijective de I sur $J = f(I)$ et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, donc $f^{-1} \in \mathscr{C}^1(J,\mathbb{R})$ et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Or $f^{-1} \in \mathscr{C}^k(J,\mathbb{R})$, par hypothèse de récurrence, et $\left(f^{-1}\right)' \in \mathscr{C}^k(J,\mathbb{R})$ d'après **(iv)** et **(iii)**, *i.e.* $f^{-1} \in \mathscr{C}^{k+1}(J,\mathbb{R})$.

■

✎ **En pratique** ✎ Pour montrer qu'une fonction est deux fois dérivable, on applique directement le théorème précédent. On ne s'amuse pas à montrer qu'elle est dérivable, à la dériver, puis à montrer que sa dérivée est à nouveau dérivable ! Il n'y a que pour les cas « dégénérés » que l'on doit repasser par le taux d'accroissement de la dérivée (ou par le théorème limite de la dérivée).

Exemple 30 la fonction $f : x \longmapsto x^2 \,\mathrm{e}^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} : x \longmapsto \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right) \mathrm{e}^x \,.$$

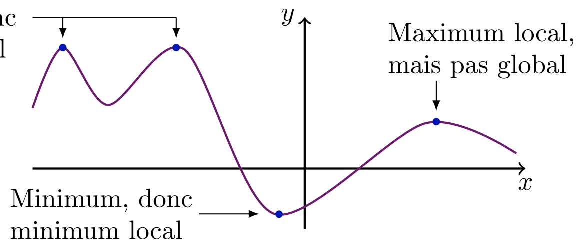
2 Informations déduites de la dérivée d'une fonction

2.1 Extrema locaux d'une fonction dérivable

Définition 31 - Extremum local et point critique. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f admet un *maximum local en a* lorsque f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a.
- On dit que f admet un *minimum local en a* lorsque f est minorée par $f(a)$ au voisinage de a.
- On dit que a est un *point critique de f* lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$.

Remarque 32 Un maximum local n'est pas nécessairement un maximum (global) de la fonction sur tout son domaine de définition.

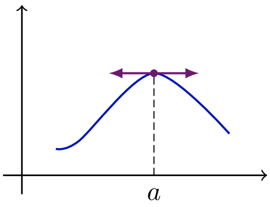


Théorème 33 - Condition nécessaire pour un extremum local en un point intérieur.
Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ à l'intérieur de I. Si f est dérivable en a et possède un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

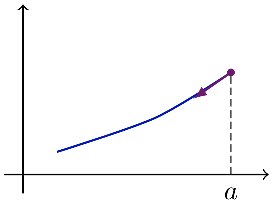
Démonstration. Étudions le cas d'un maximum local en a. Puisque f est définie à gauche et à droite de a et que f possède un maximum local en a, I contient un voisinage $]a-\eta\,, a+\eta[$ de a, pour un certain $\eta > 0$, sur lequel $f \leqslant f(a)$. Par conséquent :

$$\forall x \in \,]a-\eta\,, a]\,, \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [a\,, a+\eta[\,, \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$$

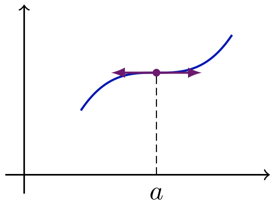
Or f est dérivable en a, donc en particulier à gauche et à droite. En passant à la limite, respectivement à gauche et à droite, dans les inégalités précédentes, il vient, $f'_g(a) \geqslant 0$ et $f'_d(a) \leqslant 0$. Finalement, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a) = 0$. ■



Situation standard du théorème (cas d'un maximum local).



Il est crucial de ne pas se situer en une extrémité de I.



Réciproque fausse : tout point critique n'est pas un extremum local.

✖ **Attention !** ✖ La condition précédente n'est pas suffisante, comme le suggère la dernière figure ci-dessus et l'exemple de la fonction cube $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée s'annule en 0 et qui n'admet pas d'extremum local en ce point. Pour une condition suffisante, on se reportera au théorème 56.

Le théorème précédent donne une manière de trouver des *candidats* pour les extremum d'une fonction, on peut commencer par chercher ses points critiques.

Exemple 34
La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2 a pour gain $G(x) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{x}{Q})^2+(1-x^2)^2}}$, après avoir posé $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, et $Q>0$ le facteur de qualité.

1. Montrer que G est maximal si et seulement si $f : x \mapsto x^2 + Q^2(1-x^2)^2$ est minimale.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. En distinguant deux cas, décrire les extrema de f.

2.2 Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis

Théorème 35 - Théorème de Rolle†. Si $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a\,,b]$, dérivable sur $]a\,,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in\,]a\,,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Puisque f est continue sur le segment $[a\,,b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée et y atteint ses bornes, disons $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$.

- Si $f(a) = f(b) \neq M$, alors, puisque f atteint ses bornes, il existe $c \in\,]a\,,b[$ tel que $M = f(c)$. Par hypothèse, c n'est pas une borne de $[a\,,b]$ et est donc un point critique de f, d'après le théorème 33, soit $f'(c) = 0$.
- Si $f(a) = f(b) \neq m$, même raisonnement.
- Sinon, $f(a) = f(b) = m = M$, auquel cas f est constante de valeur $m = M$ sur $[a\,,b]$, par définition de m et M, et donc f' est nulle sur $[a\,,b]$.

■

Remarque 36 Le théorème de Rolle est un théorème d'existence, pas d'unicité. Graphiquement, il affirme que la courbe représentative de f possède au moins une tangente horizontale.

Exemple 37 Montrer que lors d'un sprint, entre votre départ et le moment où vous vous arrêtez, il y a un moment où votre accélération a été nulle.
Même raisonnement pour l'altitude d'un avion : entre l'aterissage et le décollage, il y a un moment où la vitesse ascendante a été nulle.

Exemple 38 Soit f deux fois dérivable sur I. On suppose que f s'annule au moins trois fois dans I. Que dire sur les points d'annulations de f' et f'' ? Généraliser.

†. Michel Rolle (1652 à Ambert – 1719 à Paris) est un mathématicien français connu pour avoir établi, dans le cas particulier des fonctions polynomiales réelles, le théorème qui porte aujourd'hui son nom.

Exemple 39 Soit $f \in \mathscr{C}^3([a\,,b]\,,\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Alors il existe un réel $c \in]a\,,b[$ tel que $f^{(3)}(c) = 0$.

Une généralisation majeure du théorème de Rolle est l'égalité des accroissements finis.

Théorème 40 - Théorème des accroissements finis. Si $f : [a\,,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,,b]$ et dérivable sur $]a\,,b[$, alors il existe un réel $c \in]a\,,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction $x \longmapsto f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ (voir cours). ∎

Exemple 41 Montrer que si vous avez roulé à 60km/h de moyenne, alors il y au moins un moment où votre vitesse instantannée a été de 60km/h.

Exemple 42 Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}$.

En effet, ln est continue et dérivable sur $]0\,,+\infty[$, ainsi, pour tout $x > 0$, d'après l'égalité des accroissements finis, appliquée sur $]x, x+1[$, il existe $c \in]x\,,x+1[$ tel que $\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x} = \ln'(c) = \dfrac{1}{c}$. Or $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{x}$, d'où le résultat.

L'interprétation de l'égalité des accroissements finis est la suivante :

$\boxed{\text{Si j'ai des informations sur } f'\text{, j'en ai aussi sur } f.}$

Typiquement, toute majoration/minoration de f' peut être convertie en une majoration/minoration de f, comme l'exprime l'inégalité des accroissements finis.

Corollaire 43 - Inégalité des accroissements finis. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et m, M et k trois réels.

- Si $m \leqslant f' \leqslant M$ sur I, alors, pour tous $a, b \in I$ avec $a < b$, on a : $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.
- Si $|f'| \leqslant k$ sur I, alors, pour tous $a, b \in I$, $|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b-a|$.

Démonstration. ... ∎

✎ **En pratique** ✎ Il s'agit d'un théorème qui fait peur, mais les accroissements finis sont un puissant outil pour trouver des inégalités, il faut y penser :

- Lorsque un des membres ressemble à la dérivée de l'autre (voir exemple 42).
- Pour des inégalités comparant $f(x) - f(a)$ à $x - a$ (penser qu'on peut avoir $f(a) = 0$). En particulier, pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ et un point fixe ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$, on peut comparer $u_{n+1} - \ell$ et $u_n - \ell$ (voir section suivante).
- Et plus généralement dès qu'on est bloqué sur une inégalité.

Exemple 44 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

Exercice 45 Soit la suite définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f_n(x) = e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. sur $[0, 1]$. En déduire la limite de la suite (u_n).

2.3 Application aux suites récurrentes

Nous allons affiner l'étude des suites récurrentes près des points fixes en bornant la dérivée. Voici la stratégie générale : soit f une fonction dérivable sur un intervalle I stable par f (càd $f(I) \subset I$). On peut alors définir une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 \in I.$$

Supposons (en pratique, ce sera souvent à montrer) qu'il existe $M \in]0,1[$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M \text{ sur } I.$$

Supposons aussi que f a un point fixe ℓ dans I, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. On peut montrer (voir TD) que ce point fixe est unique, et que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ lorsque $n \to +\infty$, avec de plus la majoration

$$\forall n \geqslant 0, \quad |u_n - \ell| \leqslant M^n |u_0 - \ell|.$$

Remarque 46 La majoration ci-dessus indique une “vitesse de convergence” de la suite, car elle permet de dire quantitativement à quel point u_n est proche de ℓ en fonction de n. Dans le cas ci-dessus, la vitesse de convergence est géométrique. Elle reste bien sûr vraie pour une fonction qui vérifierait

$$\forall (x,y) \in I \times I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|,$$

indépendamment de sa dérivabilité. Notez bien que c'est $M < 1$ qui montre la convergence de la suite !

Voici un exercice (guidé) pour appliquer cela :

Exercice 47 - Relation de récurrence.

On souhaite étudier la suite définie par $(u_n)_{n\geqslant 0}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4 - \frac{1}{4}\ln(u_n), \ n \geqslant 0 \\ u_0 = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

1. Introduire une fonction f de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $[3,4]$ est stable par f. En déduire que l'on peut bien définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [3,4]$.
2. Montrer que f possède un unique point fixe, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$, dans l'intervalle $[3,4]$. On note ℓ ce point fixe.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{12}|u_n - \ell|$.
4. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi qu'une majoration du reste $|u_n - \ell|$.

On se doute que si de plus on a $f'(\ell) = 0$, la suite récurrente associée va converger encore plus rapidement vers son point fixe. Voici une illustration historique (dans laquelle on obtient une vitesse de convergence à la main) :

Exercice 48 - Méthode de Newton sur un exemple.

Etant donné $A > 0$, on cherche à approcher $\sqrt{A}$, en construisant une suite qui tend vers $\sqrt{A}$ « rapidement ». Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g : x \mapsto x^2 - A$. On va construire et étudier une suite qui converge vers un zéro de g :

1. (Méthode de Newton). Soit $u_0 > \sqrt{A}$, supposons $u_n \in \mathbb{R}$ construit, on construit u_{n+1} comme suit :
   - **a.** On considère la tangente à la courbe de g au point d'abscisse u_n. Rappeler son équation.
   - **b.** On note u_{n+1} l'abscisse de l'intersection de cette tangente avec l'axe (Ox). Illustrer.
   - **c.** Montrer qu'on a la relation de récurrence
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{A}{u_n}),$$
   et que cette relation définie bien une suite récurrente.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{A}$, et converge vers $\sqrt{A}$.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \sqrt{A}| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{A}}|u_n - \sqrt{A}|^2 \quad \text{(convergence « quadratique »)}.$$
4. Supposons pour simplifier que $A \geqslant \frac{1}{4}$, que déduire de l'inégalité ci-dessus ?

La première étape de l'exemple ci-dessus est une méthode numérique pour approcher, sous des hypothèses assez générales, une solution de l'équation $g(x) = 0$. Supposons que cette équation possède une solution notée x^*, càd que $g(x^*) = 0$, et que de plus $g'(x^*) \neq 0$. On part d'une valeur u_0 assez proche d'une solution x^*, et on définit la suite

$$u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}.$$

Il est naturel de penser que (u_n) converge vers x^* (et plus dur de voir que (u_n) converge « vite » vers x^*, voir S2). Cet algorithme, appelé « méthode de Newton », est assez facile à implémenter sur ordinateur :

En entrée du code ci-dessous : une fonction g, sa dérivée gp (et oui, python ne calcule pas de dérivée facilement), un point de départ a, et une margeur d'erreur err.

```
#Méthode de Newton pour résoudre g(x)=0
def newton(g,gp,a,err):
        delta = 1
        while delta>err
                x = a -g(a)/gp(a)
                delta = abs(x - a)
                a=x
        return a
```

2.4 Constance, monotonie et dérivabilité

Théorème 49 - Caractérisation des fonctions constantes. Soit I un INTERVALLE et f dérivable sur I.

f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Démonstration.

- Si f est constante sur I, alors, pour tous $a, x \in I$ avec $x \neq a$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, donc $f'(a) = 0$.
- Réciproquement, supposons f' nulle sur I et considérons $x, y \in I$ avec $x < y$. Alors f est continue sur $[x\,, y]$ et dérivable sur $]x\,, y[$, ainsi, il existe $c \in\,]x\,, y[$ tel que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = 0$, en vertu du théorème des accroissements finis, ce qui implique $f(y) = f(x)$. f est donc constante sur I.

■

Théorème 50 - Caractérisation des fonctions monotones dérivables. Soit I un INTERVALLE et $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$.

(i) La fonction f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.

(ii) La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a\,, b]$ avec $a < b$.
En particulier, si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

Des résultats similaires valent pour la décroissance.

Démonstration.

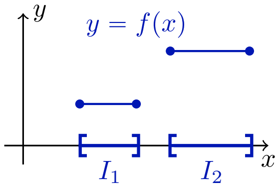
(i) Il suffit de reprendre la démonstration précédente avec des inégalités en lieu et place des égalités.

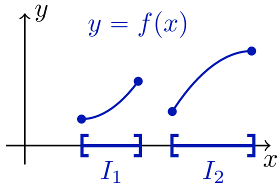
(ii) Supposons d'abord f strictement croissante sur I. D'après **(i)**, f' est positive sur I. Si en outre f' est identiquement nulle sur un intervalle $[a\,, b]$ avec $a \leqslant b$, alors f y est constante, donc $f(a) = f(b)$, ce qui entraîne $a = b$ par stricte monotonie.
Réciproquement, supposons que f' est positive sur I et n'est identiquement nulle sur aucun intervalle $[a\,, b]$ avec $a < b$. D'après **(i)**, f est croissante sur I. Considérons alors $x, y \in I$, avec $x < y$. Par croissance, $f(x) \leqslant f(y)$. Par l'absurde, si $f(x) = f(y)$, alors, par croissance de f, f est constante sur $[x\,, y]$ et f' est donc identiquement nulle sur $[x\,, y]$ – contradiction. Ainsi $f(x) < f(y)$.

■

✖ **Attention !** ✖ Dans les deux théorèmes précédents, l'hypothèse selon laquelle I est un INTERVALLE est cruciale. Ces théorèmes sont faux lorsque I est une réunion d'intervalles disjoints.

f est constante sur I_1 et I_2, ainsi $f' = 0$ sur $I_1 \cup I_2$, mais f n'est pas constante sur $I_1 \cup I_2$.

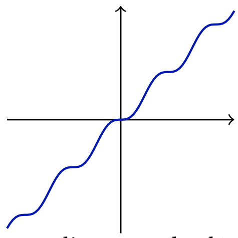




f est croissante sur I_1 et I_2, ainsi $f' \geqslant 0$ sur $I_1 \cup I_2$, mais f n'est pas croissante sur $I_1 \cup I_2$.

Exemple 51 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En effet, par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \cos x$. Ainsi $f' \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et f' s'annule sur l'ensemble $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, qui ne contient aucun intervalle de la forme $[a\,,b]$ avec $a < b$.



On peut maintenant énoncer une condition suffisante pour l'existence d'un extremum en lien avec la dérivée.

Théorème 52 - Condition suffisante pour un extremum local en un point intérieur.
Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I. Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.

Démonstration. Quite à changer f en $-f$, il existe un voisinage $]a-\eta\,,a+\eta[$ de a dans I, pour un $\eta > 0$, tel que $f' \leqslant 0$ sur $]a-\eta\,,a]$ et $f' \geqslant 0$ sur $[a\,,a+\eta[$. Alors f est décroissante sur $]a-\eta\,,a]$, ainsi $f \geqslant f(a)$ sur $]a-\eta\,,a]$, et f est croissante sur $[a\,,a+\eta[$, ainsi $f \geqslant f(a)$ sur $[a\,,a+\eta[$. Finalement f admet un minimum local en a. ■

Exemple 53 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$ admet des extrema locaux en -1 et 1.

En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Ainsi, d'après le tableau de variations ci-contre f admet 2 pour maximum local en -1 et -2 pour minimum local en 1.

Observons que la symétrie de ces résultats est liée à l'imparité de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3 Extension au cas complexe

On donne une brève extension de la notion de dérivée pour les fonctions $f : I \to \mathbb{C}$. Comme souvent, cela passe par les parties réelles et imaginaires de la fonction.

Définition 54 - Dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes.
Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

Lorsque c'est le cas, la limite est appelée nombre derivée de f en a, et noté $f'(a)$.
Les définitions données pour les fonctions à valeurs réelles suivent.

Aucune différence avec le cas réel me dite-vous ? Attention, comme pour la contnuité, : la définition de limite fait intervenir des modules et non des valeurs absolues. Mais la variable de départ, elle, reste bien réelle.

Proposition 55 - Lien avec les parties réelles et imaginaires.
Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On note $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ les deux fonctions qui vérifient

$$f = f_1 + if_2.$$

Alors f est dérivable en a si seulement f_1 et f_2 le sont, et on a alors

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x).$$

L'exemple suivant peut être très utile :

Exercice 56 - Un point qui tourne.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(t) = e^{it}.$$

Calculer f', $|f|$ ainsi que $|f'|$. Comment décrire géométriquement la fonction f ?

Exercice 57 - Calcul facile de primitive.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$, donner une primitive de $t \mapsto \cos(at)e^t$ en passant par les complexes.

Proposition 58 - Lien avec les parties réelles et imaginaires.
L'inégalité des accroissement finis reste vraie pour les fonctions à valeurs complexes (mais en remplaçant la valeur absolue par le module)

Par contre, ce n'est pas le cas des théorèmes d'égalité, essayer par exemple d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto e^{it}$ sur $[0, 2\pi]$ pour voir !

A Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau suivant, déjà vu au chaptre des fonctions usuelles, indique les dérivées à savoir par coeur : la fonction f est dérivable sur l'intervalle I, de dérivée f'.

	$f(x)$	$f'(x)$	I
1	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ ]-\infty\,,0[\text{ ou }]0\,,+\infty[& \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_- \\ ]0\,,+\infty[& \text{sinon} \end{cases}$
2	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$]0\,,+\infty[$ ou $]-\infty\,,0[$
3	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
4	a^x (a>0)	$\ln a \times a^x$	$\mathbb{R}$
5	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
6	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
7	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
8	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
9	$\tan x$	$1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right[+ k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
10	$\operatorname{Arctan} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
11	$\operatorname{Arccos} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
12	$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$

Remarque 59 Pour la ligne 4, il est sûrement préférable de se ramener à la forme exponentielle $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$.