ESPACES VECTORIELS

Dans l'intégralité de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

1) ESPACES VECTORIELS

Définition :

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tout ensemble E muni :

- d'une addition notée $+$ (appelée aussi loi de composition interne) telle que :
  - ✓ l'addition est associative : $\forall(x,y,z) \in E^3, (x+y)+z = x+(y+z)$
  - ✓ l'addition est commutative : $\forall(x,y) \in E^2, x+y = y+x$
  - ✓ l'addition possède un élément neutre noté 0_E : $\forall x \in E, x+0_E = x$
  - ✓ tout élément admet un opposé : $\forall x \in E, \exists x' \in E \mid x+x' = 0_E$
- d'une multiplication par un scalaire notée . (appelée aussi loi externe) telle que :
  $\forall(x,y) \in E^2, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$
  - ✓ $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
  - ✓ $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
  - ✓ $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$
  - ✓ $1.x = x$

Vocabulaire :

- On appelle vecteurs les éléments de E et scalaires les éléments de $\mathbb{K}$.
- L'élément neutre pour l'addition est appelé vecteur nul !

Remarques :

- Une loi de composition interne est une application de $E \times E$ dans E et une loi externe est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E.
- L'élément neutre est unique. L'opposé d'un élément aussi. Le démontrer pour s'en convaincre

Exemple :

- L'ensemble des vecteurs du plan muni de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition : règles de calculs

$\forall(x,\lambda) \in E \times \mathbb{K} :\ \lambda.x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$
$\forall(x,\lambda) \in E \times \mathbb{K} :\ \lambda.(-x) = -(\lambda.x) = (-\lambda).x$

Exemple de référence :

- $\mathbb{K}^n$, muni des lois suivantes, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :
  - ✓ $\forall(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall(y_1,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{K}^n, (x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+\ y_n)$
  - ✓ $\forall(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.(x_1,x_2,\dots,x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

Remarque :

- $\mathbb{C}$ est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemples de référence :

- $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^X$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (X ensemble non vide).
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{K}[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{K}_n[X]$ (ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\ ;\ \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemples :

- Un plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? Et si le plan ne passe pas par l'origine ?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in E^n$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$
Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Exemples :

- Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$.

2) SOUS-ESPACES VECTORIELS (s.e.v.)

Définition :

Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E telle que F est stable par addition et multiplication par un scalaire.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois de E.

Théorème : caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soit F une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si $0_E \in F$ et $\forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$

Remarques :

- Un sous-espace vectoriel est une partie non vide et stable pour la combinaison linéaire.
- E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels « triviaux » de E.

Proposition :

Soit F un sous- espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Muni des lois induites, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Remarque :

- Cette propriété est intéressante car elle permet de montrer de manière moins fastidieuse qu'un ensemble est un espace vectoriel en le considérant comme sous ensemble d'un espace vectoriel de « référence ».

Exemples :

- L'ensemble des solutions sur un intervalle non vide I d'une équation différentielle linéaire homogène est-il un espace vectoriel ?
- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 est-il un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ?

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de E.
On note :

$$\mathrm{Vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \; ; \; (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Remarque :

- $\mathrm{Vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille d'éléments de E.
$\mathrm{Vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui :

- contient tous les vecteurs x_i pour $i \in [\![1, n]\!]$;
- est inclus dans tout sous-espace vectoriel de E contenant tous les x_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Vocabulaire :

- On appelle $\mathrm{Vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Remarques :

- $\mathrm{Vect}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) espace vectoriel contenant chacun des éléments de la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Pour montrer qu'un ensemble F est un s.e.v. de E, on peut montrer que $F = \mathrm{Vect}(A)$ avec $A \subset E$.

Exemples :

- Montrer que $\{(x - 2y, y, y + x) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.
- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, que dire de $\mathrm{Vect}\{1, X, \dots, X^n\}$?
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Que penser de $\{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0\}$?
- Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$? De $\mathbb{R}^3$?
- L'ensemble des suites réelles qui convergent forment-elles un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel ?
- L'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0 forment-elles un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel ?

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque :

- Que dire de l'union de deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel ? Illustrer dans le plan.

Exemple :

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
  Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si ($F \subset G$ ou $G \subset F$).

Définition - proposition :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On appelle somme de F et G le sous-ensemble de E, définie par :

$$F + G = \{x + y \,;\, x \in F, y \in G\}$$

Et on a : $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E

Définition : somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Le sous-espace vectoriel $F + G$ est dit en somme direct noté $F \oplus G$ si

$$\forall x \in F + G, \exists\,!\,(y_1, y_2) \in F \times G \mid x = y_1 + y_2$$

Remarque :

- En clair, cela signifie que tout élément de $F + G$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemples :

- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \oplus \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$
- $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ sont-ils en somme directe ?
- $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\\1\end{pmatrix}\right)$ sont-ils en somme directe ?

Proposition : caractérisation par l'intersection

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
La somme $F + G$ est directe si, et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$

Remarque :

- Que $0_E \in F \cap G$ est clair car $F \cap G$ est un espace vectoriel. Reste à montrer que s'il existe un élément de $F \cap G$, alors cet élément est le vecteur nul 0_E.

Définition : sous-espaces supplémentaires

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.

Exemple :

- Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, F l'espace des fonctions paires continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et G l'espace des fonctions impaires continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que : $E = F \oplus G$.
  Appliquer ce résultat à la fonction exponentielle…

3) FAMILLES FINIES DE VECTEURS

Définition : famille libre, famille liée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille d'éléments de E.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre (ou linéairement indépendante) si :

$$\forall\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0_{\mathrm{E}} \implies x_1 = \cdots = x_n = 0\right)$$

On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est liée si elle n'est pas libre.

Remarques :

- A quoi correspond la notion de famille libre pour deux vecteurs du plan ? Et celle de famille liée ?
- Attention toutefois aux « faux amis » : dans $\mathbb{R}^3$, donner trois vecteurs non deux à deux colinéaires tels que la famille soit (malgré vos efforts louables !) liée.
- Si une famille est libre, alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) \Longrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = y_i)$$

Ce qui n'est autre que le procédé d'identification (largement utilisé, en particulier avec les polynômes au cours de votre scolarité. Reste qu'il faudrait que $(1, X, \dots, X^n)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ …Patience…

Exemples :

- La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$? Et $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\4\\11\end{pmatrix}\right)$?
- La famille $(\exp, \sin)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
- La famille $(x \longmapsto 1, x \longmapsto \cos 2x, x \longmapsto \cos^2 x)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Proposition : caractérisation d'une famille liée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille d'éléments de E.
La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est liée si, et seulement si l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Proposition :

Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Définition :

Une famille de polynômes non nuls $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dite de degrés échelonnés si leurs degrés forment une suite strictement croissante d'entiers.

Remarque :

- Nous n'avons pas encore (cela ne saurait tarder…) étudié les polynômes et donc pas défini le degré d'un polynôme, mais je compte sur vous pour être imaginatif (*Cf*. minute culture en fin de chapitre).

Proposition :

Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degrés échelonnés est libre.

Définition : famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille d'éléments de E.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice de E si $E = \text{Vect}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Remarques :

- Cela se traduit par :

$$\forall x \in E, \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

- Ce n'est autre que l'existence d'une décomposition de tout élément de E comme combinaison linéaire des éléments de la famille.
- On pressent que libre et génératrice, la famille aura de « belles qualités » !

Exemples :

- Donner une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. De $\mathbb{R}^3$.
- Donner une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.
- Donner une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (différente de la précédente et avec un nombre d'éléments strictement inférieur).
- Donner une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Donner une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition :

Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Définition : base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille d'éléments de E.
On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base si la famille est libre et génératrice de E.

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

$$\forall x \in E, \exists\,! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

où les scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sont appelés coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Remarques :

- Cette proposition est l'entrée pour définir la dimension d'un espace vectoriel.
- Avec une base, on peut décomposer de manière unique un élément de l'espace vectoriel.
- On pressent aussi qu'une base doit contenir juste le nombre de vecteurs nécessaires pour générer l'espace vectoriel, autrement elle perd sa « liberté ».

Définition : base canonique de $\mathbb{K}^n$

Les vecteurs $e_1 = (1,0, \dots ,0), e_2 = (0,1, \dots ,0), \dots , e_n = (0,0, \dots ,1)$ forment une base (dite canonique) du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Remarques :

- Base canonique signifie base naturelle.
- Dans cette base, les coordonnées du vecteur $(x_1, x_2, \dots , x_n)$ sont $(x_1, x_2, \dots , x_n)$, d'où une possible confusion. Illustrons…

Exemple :

- Montrer que les vecteurs $e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,2,3), e_3 = (2,4,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
  Soit $(3,1,20)$ les coordonnées d'un élément x dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
  Déterminer les coordonnées de x dans la base (e_1, e_2, e_3). Comprenez-vous mieux la remarque ?

Définition : base canonique de $\mathbb{K}^n[X]$

Les vecteurs $e_0 = 1, e_1 = X, \dots , e_n = X^n$ forment une base (dite canonique) du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n[X]$.

Remarques :

- Ce sont des polynômes échelonnés….
- Dans cette base, les coordonnées d'un polynôme sont les coefficients des X^k

Définition : base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ($(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$)

Les $n \times p$ vecteurs $M_{1,1}, \dots , M_{1,p}, M_{2,1}, \dots , M_{2,p}, \dots , M_{n,1}, \dots , M_{n,p}$ forment une base (dite canonique) du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
où $M_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls hormis celui à la ligne i et colonne j, égal à 1.

Remarque :

- Rappelez-vous, on a déjà utilisé des matrices carrées similaires lors de la recherche du commutant de matrices.

Proposition : base adaptée à une somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soient F et G deux sous-espaces en somme directe.
Soient $(f_1, f_2, \dots , f_n)$ une base de F et $(g_1, g_2, \dots , g_p)$ une base de G.
Alors, la famille $(f_1, f_2, \dots , f_n, g_1, g_2, \dots , g_p)$ est une base de $F \oplus G$ et la base est dite adaptée à la décomposition en somme directe.

Remarque :

- Une conséquence de ce résultat est que si F et G sont supplémentaires dans E, alors la famille obtenue par le procédé de la proposition est une base de E.

Exemples :

- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$.
  Est-ce un espace vectoriel ? Donner une base. Donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$. Doit-on dire un supplémentaire ou le supplémentaire ?
- Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$. Donner une base de F. Donner un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Minute culture :

✓ David Hilbert est l'un des plus grands mathématiciens du XIX^e et XX^e siècles. Il a laissé une liste de 23 problèmes mathématiques, appelés problèmes de Hilbert à résoudre. Nombre d'entre eux ont été résolus. Certains vous attendent… dont le plus célèbre concerne les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann. Ce problème est l'un des sept problèmes du millénaire, récompensé chacun d'un prix d'un million de dollars (êtes-vous vénaux ?). Sachez que l'un des sept a été résolu en 2003 par un mathématicien russe qui a…refusé le prix et arrêté les mathématiques.

✓ Hilbert considérait que l'imagination était essentielle en mathématiques. On lui prête le commentaire suivant, apprenant qu'un étudiant se détournait des mathématiques au profit de la poésie :
« De toute façon, j'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour faire des mathématiques (*sic*) ».