Interro de calcul
Polynômes et DES

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Factoriser $X^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ en produit de facteurs irreductibles.

Correction :

- On a sur $\mathbb{R}$, l'identité remarquable à savoir :

$$\boxed{X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)}.$$

Or le polynôme $X^2 + X + 1$ est irreductible car de discriminant -3. Ainsi, $X^3 - 1$ n'a qu'une seule racine sur $\mathbb{R}$, 1, et il n'est pas scindé.

- Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss). Le polynômes $X^3 - 1$ a trois racines, à savoir les racines cubiques de l'unité, 1, j et j^2, avec

$$\boxed{j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Ainsi on a

$$\boxed{X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2).}$$

Question 2 : Effectuer la décomposition en éléments simples de $\frac{2X^3}{(X-1)(X+1)}$ (on n'oubliera pas la partie entière)

Correction : On a $\deg(2X^3) - \deg((X-1)(X+1)) = 1$. Ainsi, on sait que la fraction rationnelle admet une décomposition de la forme

$$\frac{2X^3}{(X-1)(X+1)} = E + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}, \quad \text{avec} \begin{cases} a \text{ et } b \in \mathbb{R} \\ E \in \mathbb{R}_1[X] \end{cases},$$

autrement dit :

$$\frac{2X^3}{(X-1)(X+1)} = \alpha X + \beta + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}, \quad \text{avec} \begin{cases} a \text{ et } b \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

On trouve a et b avec la méthode standard :

- On multiplie par $X - 1$, on évalue en le pôle 1. On trouve $\boxed{a = 1}$.
- On multiplie par $X + 1$, on évalue en le pôle -1. On trouve $\boxed{b = 1}$.

Pour la partie entière, on peut effectuer la division euclidienne de $2X^3$ par $(X-1)(X+1)$. Il y a plus rapide :

- On divise par X, on fait tendre X vers $+\infty$. On trouve $\boxed{\alpha = 2}$ (ou : on écrit des équivalents en $+\infty$, sans diviser par X).
- On évalue en 0. On trouve $0 = \beta - a + b = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\beta = 0}$.

Question 3 : Trouver a, b et c tels que

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1}.$$

Correction

- On trouve avec la méthode standard $\boxed{a=1}$.
- On multiplie par X^2+1, on évalue en le pôle i.

$$bi + c = \frac{1}{i} = -i,$$

et donc par identification

$$\boxed{b=-1} \quad \text{et} \quad \boxed{c=0}.$$

Question 4 : Trouver des réels a_1, a_2 et b tels que

$$\frac{1}{X^2(X-1)} = \frac{a_1}{X^2} + \frac{a_2}{X} + \frac{b}{X-1}.$$

Correction

- On trouve avec la méthode standard $\boxed{b=1}$.
- De même, on multiplie par X^2 et on évalue en 0. on trouve $\boxed{a_1=-1}$.
- Pour le dernier terme, on multiplie par X, et on fait tendre X vers $+\infty$. On trouve $0 = a_2 + b$ et donc $\boxed{a_2=-1}$.

Question 5 (Le petit bonus) : Soient les deux points de l'espace $A = (-1,-3,0)$ et $B = (0,2,3)$ et $C = (2,0,-3)$. Donner une équation cartésienne du plan passant par A, B et C.

Correction Dans un premier temps, on peut calculer une normale au plan $\mathcal{P}$ cherché : On a $\overrightarrow{AB} = (1,5,3)$ et $\overrightarrow{AC} = (3,3,-3)$, puis on pose $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-24,12,-12) = 12(-2,1,-1)$. Ainsi, une normale au plan cherché est $\overrightarrow{n'} = (-2,1,-1)$ (on peut laisser le facteur 12 mais cela conduit à des équations moins agréables).

On a alors

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n'} = 0 \iff -2(x+1) + (y+3) - z = 0 \iff \boxed{-2x + y - z + 1 = 0.}$$

On peut vérifier que les coordonnées de A, B et C satisfont l'équation pour se rassurer.