Interro de calcul : correction
Polynômes et géométrie

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Soient les deux points du plan $A = (-1, -3)$ et $B = (2, 3)$.

1. Un point $M(x, y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AB} = (3, 6)$ et $\overrightarrow{AM} = (x + 1, y + 3)$ sont colinéaires. On déduit :
$$M \in (AB) \iff [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = 0 \iff 3(y + 3) - 6(x + 1) = 0 \iff -2x + y + 1 = 0 \iff \boxed{y = 2x - 1}.$$
2. Une équation paramétrique en est
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 + 6t \end{cases}$$
3. On lit un vecteur normal sur l'équation de la droite $\vec{n} = (-2, 1)$. On pouvait aussi partir du vecteur $\overrightarrow{AB} = (3, 6)$ et donner un vecteur qui lui est perpendiculaire : $(-6, 3)$ par exemple.
4. La distance à l'origine est donnée par
$$d(O, (AB)) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$
On pouvait aussi (c'est pareil) utiliser la formule exploitant l'équation de la droite, $-2x+y+1 = 0$, ce qui donne
$$d(O, (AB)) = \frac{|-2x_O + y_O + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$
5. Notons $H = (x, y)$ le projeté orthogonal, parmi les nombreuses métodes, on peut écrire que $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ et $H \in (AB)$, ce qui donne
$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{et} \quad y = 2x - 1 \iff \begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$
et il ne reste plus qu'à résoudre ce système.

Question 2 : On utilise la mise sous forme canonique :
$$x^2 + 4x + y^2 - 8y = 24 \iff (x + 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 = 24 \iff (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 44,$$
Ainsi l'ensemble recherchée est le cercle de centre $\Omega = (-2, 4)$ et de rayon $\sqrt{44}$.

Pour déterminer l'intersection de cet ensemble avec la droite $y = x$, on injecte cela dans l'équation initiale et on obtient
$$2x^2 - 4x - 24 = 0.$$
Surtout ne pas se lancer dans le calcul de discriminant tout de suite, on divise d'abord par 2 :
$$2x^2 - 4x - 24 = 0. \iff x^2 - 2x - 12 = 0.$$
On résout, et on déduit y grâce à $y = x$. Au final on trouve deux points d'intersection.

Question 3 : On a
$$\deg(P(X^3)) = 3n \quad \text{et} \quad \deg(X^m P) = m + n.$$