

Interro de calcul 6

Fonctions circulaires réciproques et suites

Ceci est un entraînement.

Question 1 : Les fonctions suivantes sont bijectives :

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arccos} : [-1, 1] \mapsto [0, \pi] \quad \text{et} \quad \text{Arctan} : \mathbb{R} \mapsto \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Question 2 : Puisque Arcsin est défini sur $[-1, 1]$, la fonction est définie lorsque $-1 \leq \frac{x+2}{3} \leq 1 \iff -5 \leq x \leq 1$. Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction est $[-5, 1]$.

Question 3 : Voir cours : on dresse le tableau de variation de $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$. Cette fonction est minimum en 0, et ce minimum vaut 0.

Question 4 : On associe l'équation caractéristique $X^2 = 5X - 6 \iff X^2 - 5X + 6 = 0$. Il est direct qu'on a deux racines simples : $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$, ainsi on a

$$u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n, \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Si on suppose de plus que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \iff \mu = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = -1,$$

d'où $u_n = 3^n - 2^n$.

Question 5 : Il s'agit d'une suite géométrique de raison 3, on a donc

$$u_n = u_0 3^n = 2 \times 3^n.$$

Question 6 : On commence par résoudre l'équation $\ell = -2\ell + 2$, qui a pour solution $\ell = \frac{2}{3}$. On soustrait cette équation à la relation de récurrence définissant $(u_n)_{n \geq 0}$:

$$u_{n+1} - \ell = -2u_n + 2 - (-2\ell + 2) = -2(u_n - \ell).$$

Ainsi, la suite définie par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison -2 , et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell = \frac{4}{3}$. D'où :

$$v_n = \frac{4}{3} \times (-2)^n \iff u_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times (-2)^n.$$

Il doit être naturel de vérifier votre formule pour $n = 0$.