# Interro de calcul 5
# Fonctions circulaires réciproques et suites

*Ceci est un entrainement.*

**Question 1 :** Les fonctions Arcsin et Arccos sont définies sur $[-1, 1]$, tandis que Arctan est défini sur $\mathbb{R}$.
On a $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$ si et seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

**Question 2 :** On a $\text{Arcsin}\, 0 = 0$, $\text{Arccos}(-1) = \pi$ et $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.

**Question 3 :** Voir cours pour le graphe, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

**Question 4 :** On a $\cos^2(\text{Arcsin}\, x) + \sin^2(\text{Arcsin}\, x) = 1$, or $\sin(\text{Arcsin}\, x)) = x$, et donc $\cos(\text{Arcsin}\, x)) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Or $\text{Arcsin}\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif. Ainsi $\cos(\text{Arcsin}\, x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

**Question 5 :** On a $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

**Question 6 :** Pour $x > 1$, on a $0 < \frac{1}{x} < 1$, et on peut bien définir $\text{Arcsin}\, \frac{1}{x}$, en outre, on peut dériver cette fonction car Arcsin est dérivable sur $]0, 1[$.
On applique la formule $(\text{Arcsin}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ :

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

**Question 7 :** On applique la formule $(\text{Arctan}\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$. On a donc

$$g'(x) = \frac{3x^2}{1 + (x^3)^2} = \frac{3x^2}{1 + x^6}.$$

**Question 8 :** On applique la formule $\tan(a + b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a \tan b}$ :

$$\tan(\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, x^2) = \frac{\tan \text{Arctan}\, x + \tan \text{Arctan}\, x^2}{1 - \tan(\text{Arctan}\, x) \times \tan(\text{Arctan}\, x^2)} = \frac{x + x^2}{1 - x^3}.$$

**Question 9 :** Il s'agit d'une suite géométrique de raison $-2$ et de premier terme 3. On a

$$u_n = 3 \times (-2)^n.$$

**Question 10 :** On commence par résoudre l'équation $\ell = 3\ell + 1$, qui a pour solution $\ell = -\frac{1}{2}$. On soustrait cette équation à la relation de récurrence définissant $(u_n)_{n\geqslant 0}$ :

$$u_{n+1} - \ell = 3u_n + 1 - (3\ell + 1) = 3(u_n - \ell).$$

Ainsi, la suite définie par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison 3, et de permier terme $v_0 = u_0 - \ell = \frac{5}{2}$. D'où :

$$v_n = \frac{5}{2} \times 3^n \iff u_n = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \times 3^n.$$

Il doit être naturel de vérifier votre formule pour $n = 0$.