Interro de calcul 5
Fonctions circulaires réciproques et suites

Ceci est un entrainement.

Question 1 : On a $\text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Question 2 : Voir cours pour le graphe, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \text{Arctan}\, x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

On a aussi $\forall x \in \mathbb{R} : \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Question 3 : On a $\cos^2(\text{Arcsin}\, x) + \sin^2(\text{Arcsin}\, x) = 1$, or $\sin(\text{Arcsin}\, x)) = x$, et donc $\sin(\text{Arccos}\, x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Or $\text{Arccos}\, x \in [0, \pi]$, intervalle sur lequel le sinus est positif. Ainsi $\sin(\text{Arccos}\, x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Question 4 : On a $\forall x \in]-1, 1[$: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Ainsi, la fonction f est constante sur $]-1, 1[$, et elle y vaut $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

Question 5 : Par dérivée d'une composée, on a $f'(x) = 3x^2 \,\text{ch}(x^3)$.

On a de plus : $f(-x) = \text{sh}((-x)^3) = \text{sh}(-x^3) - \text{sh}(x^3) = -f(x)$. Donc la fonction est impaire.

Question 6 : La fonctione est définie lorsque $x - 1 > 0$ c'est à-dire sur $]1, +\infty[$. On a alors $g(x) = e^{x\ln(x-1)}$, et donc $g'(x) = (\ln(x-1) + \frac{x}{x-1})e^{x\ln(x-1)}$.

Question 7 : On a $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$ (là où elle cette formule a un sens). On a alors

$$\tan(\text{Arctan}\, x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \text{Arctan}\, x - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan(\text{Arctan}\, x) \times \tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{x-1}{1+x}.$$

Question 8 : On a

$$|\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}| = \frac{|jRC\omega|}{|1+jRC\omega|} = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}.$$

Notons $\arg(\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega})$ l'argument principal de $\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$, situé dans $]-\pi, \pi]$. On a

$$\arg(\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}) \equiv \arg(jRC\omega) - \arg(1+jRC\omega) \quad [2\pi],$$

or on a clairement $\arg(jRC\omega) = \frac{\pi}{2}$ et puisque $\text{Re}(1 + jRC) > 0$, on peut utiliser la formule avec l'arctangente (qui renvoie un argument dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\arg(1+jRC\omega) = \text{Arctan}(\frac{\text{Im}(1+jRC\omega)}{\text{Re}(1+jRC\omega)}) = \text{Arctan}(RC\omega).$$

Au final, un argument de $\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$ est $\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(RC\omega)$. Ce nombre est entre 0 et π, c'est l'argument principal.

Notez qu'on attend pas une rédaction aussi détaillée en interro de calcul.