Interro de calcul 5
Développements limités

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Donner le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0.
Donner le DL à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en 0.

Correction : Il s'agit de THE formule, il faut la connaître :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3.$$

On l'applique :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + o(x^2).$$

Question 2 : Justifier, en revenant à la définition, que $\sqrt{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$.

Correction : On forme le quotient et on calcule sa limite :

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}},$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}\sqrt{x} = 1$, ce qui prouve que $\sqrt{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$.

Remarque : Pour montrer un équivalent $f \sim g$ qui n'est pas donné dans le cours, on revient souvent à la définition : on doit montrer que le quotient $\frac{f}{g}$ tend vers 1.

Question 3 : Effectuer le DL en 0, à l'ordre 3, de $x \mapsto e^{-x}$.

Correction : On a, lorsque $x \to 0$:

$$e^x = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Question 4 : Effectuer le DL en 0, à l'ordre 3, de $x \mapsto \ln(1-x) \times \cos(x)$.

Correction : On a, lorsque $x \to 0$:

$$\begin{cases} \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{(que des - pour } \ln(1-x)) \\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{cases}$$

On déduit le DL du produit (calculs laissés en détails) :

$$\ln(1-x) \times \cos(x) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Question 5 : Enoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 en un point $a \in \mathbb{R}$.

L'appliquer à la fonction $x \mapsto \cos(x)$ en $a = \frac{\pi}{4}$.

Correction : On a, lorsque $x \to a$ (commencer par écrire l'équation de la tangente) :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

On pouvait aussi donner l'autre visage : on a lorsque $h \to 0$ (penser : $h = x - a$ et $x = a + h$.

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2).$$

L'application demandée donne, lorsque $x \to \frac{\pi}{4}$

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 + o((x - \frac{\pi}{4})^2).$$

Question 6 : Inverser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

On applique le pivot. Noter que l'on peut permuter $L2$ et $L3$ dans la 2e étape pour éviter les fractions. Après calculs :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$