

Interro de calcul 3

Calculs algébriques

Ceci est un entraînement.

Question 1 : Voir interro précédente.

Question 2 : On a $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Question 3 : Soit $x \in \mathbb{C}$, avec $x \neq 1$, et $n \in \mathbb{N}$. On a la formule pour cette somme géométrique de raison x :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

On déduit (attention, il manque le premier terme) :

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - \frac{1}{2^{10}} - 1 = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$$

Question 4 : On a par télescopage :

$$\sum_{k=0}^n (e^{k+2} - e^{k+3}) = (e^2 - e^3) + (e^3 - e^4) + \dots + (e^{n+1} - e^{n+2}) + (e^{n+2} - e^{n+3}) = e^2 - e^{n+3}$$

Question 5 : On a $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = \frac{120}{6} = 20$.

Question 6 : On a $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Question 7 : On a $X^2 + X + 1 = X^2 + X + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Question 8 : On a

$$(\cos x)^3 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x)) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))$$