Interro de calcul 3
Calculs algébriques

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$

Correction : On a $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On a aussi : $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 3 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3(n+1) = n^2 + 3n + 4$.

Question 2 : Pour un entier $n \geqslant 2$, mettre sous forme d'une somme avec le symbole Σ :

$$\frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \times n \times (n+1)}$$

Correction : On a

$$\frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \times n \times (n+1)} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$$

Question 3 : Donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et de $\sum_{k=1}^{n} q^k$ avec $q \neq 1$.

Correction : C'est une somme géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme 1 ($k=0$) :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

La deuxième somme, elle, a pour premier terme q :

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Question 4 : Enoncer la formule du binôme de Newton. Calculer $\binom{5}{3}$

Correction : Binôme : voir cours.
On a $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$.

Question 5 : Simplifier :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)! - k!)$$

Correction : Ce sont deux sommes télescopiques :

$$S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \quad \text{et} \quad S_2 = n! - 0! = n! - 1$$

Question 6 : Développer $(a-b)^3$

Correction : On a $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Question 7 : Linéariser $(\cos x)^3$. En déduire une primitive de $x \mapsto \cos(3x)$.

Correction :

On a (voir cours pour les détails) :

$$(\cos x)^3 = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x)) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x)).$$

On déduit :

$$\int^x \cos(t)^3 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}\sin(3x) + 3\sin(x)).$$

Question 8 : Mme Cavallo écrit une loi des mailles dans un circuit avec deux résistances en séries :

$$U = U_1 + \frac{R_2}{R_1}U_1.$$

Elle vous demande d'isoler U_1 (pont diviseur de tension) :

Correction :

On a

$$U = (1 + \frac{R_2}{R_1})U_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \times U_1 \iff U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}U.$$