Interro de calcul 2
Nombres complexes–Corrigé

Ceci est un entrainement.

Question 1 : Résoudre l'équation différentielle :

$$y'(x) + 4y(x) = 0$$

Correction : L'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-4x}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Question 2 : Trouver une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'(x) + 4y(x) = e^{-2x}.$$

En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

Correction : On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto Ae^{-2x}$, avec $A \in \mathbb{R}$ à trouver. On a alors :

$$\begin{aligned} y_p'(x) + 4y_p(x) = e^{-2x} &\iff -2Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} = e^{-2x} \\ &\iff 2Ae^{-2x} = e^{-2x} \\ &\iff 2A = 1 \\ &\iff A = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x}$.

On conclut par superposition : l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{x \mapsto \lambda e^{-4x} + \frac{1}{2}e^{-2x}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Question 3 : Mettre sous forme algébrique $\frac{1}{2-i}$ et i^3.

Correction : On a $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{|2-i|^2} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$. On a aussi $i^3 = i \times i^2 = -i$.

Question 4 : Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $z = 1 - i$. En déduire $(1-i)^4$.

Correction : On a après calculs, ou dessin : $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, on a

$$z^4 = \sqrt{2}^4 e^{-i\frac{\pi}{4}\times 4} = 2^2 e^{-i\pi} = -4$$

Question 5 : Calculer $|3 - 4i|$.

Correction : On a

$$|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Question 6 : Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z-2i| = 2$. On pourra introduire des éléments géométriques de votre choix.

Correction : Soit $A = (0,2)$ d'affixe $z_A = 2i$. On a alors

$$|z-2i| = 2 \iff AM = 2.$$

L'ensemble des solutions est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

Question 7 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, factoriser avec la technique de l'angle moitié :

$$1+e^{i\theta} =$$

En déduire le module de ce nombre complexe.

Correction : On a :

$$1+e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On déduit que $|1+e^{i\theta}| = 2|\cos(\frac{\theta}{2})|$.

Question 8 (dédicace à Madame Cavallo): Simplifier $\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$.

Correction : On a : $\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1R_2}+\frac{R_1}{R_1R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2+R_1}{R_1R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.