

Interro de calcul 2

Nombres complexes et réels

Ceci est un entraînement.

Question 1 : Mettre sous forme algébrique $\frac{2+i}{-3-i}$ et i^4 . Mettre sous forme algébrique : $(2+3i)^3$.

Correction : On a $\frac{2+i}{-3-i} = \frac{(2+i)(-3+i)}{|-3-i|^2} = \frac{-7-i}{9+1} = -\frac{7}{10} - \frac{1}{10}i$. On a aussi $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.
On développe avec le binôme :

$$(2+3i)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times 3i + 3 \times 2 \times (3i)^2 + (3i)^3 = 8 + 24i - 54 - 27i = -46 - 3i$$

Question 2 : Mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $z = -1 + i$. En déduire $(-1 + i)^6$.

Correction : On a après calculs, ou dessin : $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Ainsi, on a

$$z^6 = \sqrt{2}^6 e^{i\frac{3\pi}{4} \times 6} = 2^3 e^{i\frac{9\pi}{2}} = 8i$$

Question 3 : Calculer le module et un argument de $z = \sqrt{3} - i$.

Correction : On a $|z| = 2$, et un argument θ vérifie :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

On peut prendre $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Question 4 : Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - 2i| = |z + 3 + i|$. On pourra introduire des éléments géométriques de votre choix.

Correction : Soit $A(0, 2)$ d'affixe $z_A = 2i$ et $B(-3, -1)$ d'affixe $z_B = -3 - i$. On a alors

$$|z - 2i| = |z + 3 + i| \iff AM = BM.$$

L'ensemble des solutions est donc la médiatrice du segment $[AB]$. Les plus acharnés peuvent en trouver une équation cartésienne.

Question 5 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$, factoriser avec la technique de l'angle moitié $1 - e^{i\theta}$. En déduire le module de ce nombre complexe.

Correction : On a :

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

On déduit que $|1 - e^{i\theta}| = 2|\sin(\frac{\theta}{2})|$.

Question 6 : Résoudre : $|x + 1| = |2x - 6|$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Correction : On raisonne selon 3 cas

- $x \in]-\infty; -1]$.

L'équation devient : $-x - 1 = -2x + 6 \iff x = 7$. Or $7 \notin]-\infty; -1]$. Donc, pas de solution sur cet intervalle.

- $x \in [-1; 3]$.

L'équation devient : $x + 1 = -2x + 6 \iff x = \frac{5}{3}$. Or $\frac{5}{3} \in [-1; 3]$. Donc, une solution sur cet intervalle : $\frac{5}{3}$.

- $x \in [3; +\infty[$

L'équation devient : $x + 1 = 2x - 6 \iff x = 7$. Or $7 \in [3; +\infty[$. Donc, une solution sur cet intervalle : 7.

Conclusion : $\mathcal{S} = \{\frac{5}{3}; 7\}$.

Question 7 : Donner le tableau de variation, sur $]0, +\infty[$, de la fonction $f : x \mapsto \frac{4}{x} + x$.

Correction : Pas de piège, on applique les techniques du lycée.

Question 8 :

1. Rappeler les valeurs de $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k^2$

2. En déduire $\sum_{k=0}^n k(k+1)$.

Correction : Pas de piège, on applique le cours.

Question 9 (dédicace à Madame Cavallo):

1. Exprimer $\sin(t)^2$ en fonction de $\cos(2t)$.
2. En déduire $\int_0^T (\sin(\omega t + \varphi))^2 dt$, avec $\omega > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ fixés, ainsi que $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Correction : Voir Madame Cavallo