Interro de calcul 1 : outils maths
Corrigé

Question 1 : Simplifier $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$, puis $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$. Simplifier $\frac{9}{3\sqrt{3}}$.

Correction : On a : $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{5}{12}$, puis $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.
On a $\frac{9}{3\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

Question 2 : Calculer $\frac{7\pi}{6}-2\pi$ et $\frac{\pi}{2}+4\pi$

Correction : On a : $\frac{7\pi}{6}-2\pi=\frac{7\pi}{6}-\frac{12\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}+4\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{8\pi}{2}=\frac{9\pi}{2}$.

Question 3 : Donner les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\cos(\frac{5\pi}{3})$, et $\sin(-\frac{15\pi}{2})$.

Correction : On a $\sin(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, $\cos(\frac{5\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\sin(-\frac{15\pi}{2})=\sin(-\frac{15\pi}{2}+8\pi)=\sin(\frac{\pi}{2})=1$.

Question 4 : Exprimer $\sin(x-\frac{\pi}{3})$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Correction : On a $\sin(x-\frac{\pi}{3})=\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

Question 5 : Donner au moins deux formules pour $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Donner $\sin(x-\frac{\pi}{2})$ et $\cos(-x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Correction : On a : $\cos(2x)=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$.
On a : $\sin(x-\frac{\pi}{2})=-\cos(x)$ et $\cos(-x)=\cos(x)$

Question 6 : Résoudre l'équation : $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$, et illustrer avec le cercle trigonométrique.

Correction : On a, en lisant un cercle trigo :

$$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\iff x\equiv\frac{\pi}{6}\quad[2\pi]\quad\text{ou}\quad x\equiv-\frac{\pi}{6}\quad[2\pi].$$

Question 7 : Dériver $f:x\mapsto e^{x^5}$, puis donner l'équation de la tangente en $x=1$.

Correction : On a $f'(x)=5x^4e^{x^5}$. L'équation de la tangente en $x=1$ est :

$$y=(x-1)f'(1)+f(1)=(x-1)5e+e=5ex-4e$$

Question 8 : Dériver $g:x\mapsto\sin(\frac{1}{x})$.

Correction : On a $g'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$.

Question 9 : Calculer $\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Correction : On fait une intégration par partie :

$$\int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t = [t\times(\sin t)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = 0 + [\cos t]_0^\pi = -2.$$

Question 10 : Factoriser x^2-9, puis donner son tableau de signe.

Correction : On a $x^2-9 = (x+3)(x-3)$. On déduit facilement le tableau de signes.

Question 11 : Donner les solutions de l'équation différentielle $y'(x) + 2y(x) = x$.

Correction : Les solutions de l'équation homogène sont : $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Ax + B$. On injecte, on trouve que l'on doit avoir :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad A + 2(Ax+B) = x \iff 2Ax + A + 2B = x \iff \left\{\begin{array}{l} 2A = 1 \\ A + 2B = 0 \end{array}\right. \iff A = \frac{1}{2} \text{ et } B = -\frac{1}{4}.$$

Par superposition, l'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Question 12 : Pour des résistances en parallèle, on a : $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{eq}}$. Exprimer R_{eq} en fonction de R_1 et R_2.

Correction : On passe à l'inverse :

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{R_2}{R_1R_2}+\frac{R_1}{R_1R_2}} = \frac{1}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$