Interro de calcul
Espace vectoriel

Ceci est un entrainement.

Question 1 :

Soit
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 7y - z = 0\}$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une famille génératrice.

Correction :

On a :
$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = -7y + z\} \\ &= \{(-7y + z, y, z),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(-7, 1, 0) + z(1, 0, 1),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((-7, 1, 0); (1, 0, 1)). \end{aligned}$$
Cela montre que F est un sous-espace vectorielde E, et qu'une famille génératrice de F est $((-7, -1, 0); (1, 0, 1))$.

Question 2 :

Soit
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ 3x + 4y + 2z + 6t = 0 \end{array} \right. \right\}$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une famille génértrice.

Correction :

On commence par échelonner avec un pivot de Gauss, que l'on remonte ensuite afin d'exprimer les premières variables en fonctions des dernières :
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ 3x + 4y + 2z + 6t = 0 \end{array} \right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ y - z + 3t = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -y - z - t \\ y = z - 3t \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -2z + 2t \\ y = z - 3t \end{array} \right.$$
On a donc :
$$\begin{aligned} F &= \{(-2z + 2t, z - 3t, z, t), \quad \text{avec } (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{z(-2, 1, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1), \quad \text{avec } (z, t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((-2, 1, 1, 0); (2, -3, 0, 1)) \end{aligned}$$
Cela montre que F est un sous-espace vectorielde E, et qu'une famille génératrice de F est $((-2, 1, 1, 0); (2, -3, 0, 1))$.

Question 3 : Soit la famille suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$e_1 = (1, -3, 2), \quad e_2 = (2, 4, -1), \quad e_3 = (4, -2, 3)$$

Est-elle libre ?
Bonus : que dire de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$?

Correction :
On se donne $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. On résout :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_2 = 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 10\lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 - 5\lambda_2 = 0 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}\right. .$$

Finalement :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{array}\right. .$$

Cela prouve qu'il y a d'autres solutions que $(0, 0, 0)$, par exemple, pour $\lambda_3 = 1$, on a $(-2, -1, 0)$. Donc la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

Les plus affûtés peuvent noter sans faire de système que $e_3 = e_1 + 2e_2$, ce qui indique directement que la famille n'est pas libre.

Puisque (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre, on va pouvoir simpifier le Vect en exprimant un vecteur comme combinaison linéaire des autres. En effet :

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_1 + 2e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2).$$

Question 4 : Soit

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid XP' = P\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et en donner une famille génératrice.

Correction : On cherche P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$. On a alors

$$XP' = P \iff X(2aX + b) = aX^2 + bX + c \iff 2aX^2 + bX = aX^2 + bX + c \iff \left\{\begin{array}{l} 2a = a \\ b = b \\ 0 = c \end{array}\right. \iff a = c = 0.$$

Ainsi, on a

$$F = \{bX, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X).$$

Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, et que le polynôme X est une famille génératrice.