Interro de calcul et cours 10
Primitives et équadiff
Corrigé

Ceci est un entrainement.

Question 1 (Banque PT 2022): Ici, avec les notations du cours, $a(x) = -2x$, et une primitive est $A(x) = -x^2$. Les solutions sont
$$y : x \mapsto \lambda e^{x^2}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La condtion $y(0) = 2$ donne $\lambda e^0 = 2$ et donc $\lambda = 2$.

Question 2 : On a en reconnaissant une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$. :
$$\int^x \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \ln(|x^2+1|) = \ln(x^2+1)$$

Question 3 : Il est bon de savoir qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}(\frac{x}{a})$.

Question 4 : On a $x^2 + 4x + 10 = (x+2)^2 - 4 + 10 = (x+2)^2 + 6$.

Question 5 : Une primitive de $t \mapsto x \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ est $t \mapsto \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$

Question 6 : Après application du cours, les solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 16y(x) = 0$ sont
$$y_0(x) = A\cos(4x) + B\sin(4x).$$

On a déjà résolu l'équation homogène. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$. On a
$$y_p''(x) + 16y_p(x) = -\alpha\cos x - \beta\sin x + 16\alpha\cos x + 16\beta\sin x = 15\alpha\cos x + 15\beta\sin x,$$
et donc par identification, y_p est solution lorsque $15\alpha = 1$ et $B = 0$, autrement dit pour $y_p(x) = \frac{1}{15}\cos$. Par superposition, l'ensemble des solutions est
$$x \mapsto A\cos(4x) + B\sin(4x) + \frac{1}{15}\cos x, \qquad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Question 7 : On pose $u = e^x$, ce qui donne $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x$ et donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{e^x} = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Ce changement de variable donne :
$$\int_0^1 \frac{1}{2+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{2+u} \times \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^e \frac{1}{(2+u)u}\,\mathrm{d}u$$

On fait une DES : on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\frac{1}{(2+u)u} = \frac{a}{2+u} + \frac{b}{u},$$
et les techniques du cours conduisent à $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$. Ainsi,
$$\int_0^1 \frac{1}{2+e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{u} - \frac{1}{2+u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}[\ln|u| - \ln|2+u|]_1^e = \frac{1}{2}(1 - \ln(2+e) + \ln 3).$$