Interro de calcul 6
Développements limités – Corrigé

Ceci est un entrainement.

Question 1 : On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Question 2 : On a $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
Question 3 : On a $\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$ et $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

Question 4 : On a en composant avec le DL ci-dessus :

$$\frac{1}{1-x^3} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^3 + x^6 + o(x^6).$$

Question 5 : On effectue les DL des deux facteurs en 0, à l'ordre 3 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Notez qu'on fait le DL de cos à l'ordre de 2 car on anticipe en sachant que $\ln(1+x)$ n'a pas de terme constant. On fait le produit, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 3 :

$$\begin{aligned}\cos x \times \ln(1+x) &= (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \times (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\ &= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\end{aligned}$$

Question 6 : Puisqu'il s'agit d'un produit et d'une quotient de fonctions, des équivalents suffisent, et on n'a pas besoin de faire des DL. On a :

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \text{ et donc } \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^2.$$

On a aussi

$$\operatorname{Arcsin} u \underset{u\to 0}{\sim} u \text{ et donc } \operatorname{Arcsin} 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x.$$

Par quotient d'équivalent :

$$\frac{\sin^2 x}{\operatorname{Arcsin} 2x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}.$$

On déduit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{Arcsin} 2x} = 0$.

Question 7 : La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 en un point $a \in \mathbb{R}$ est :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + o((x-a)^2).$$

La version alternative est, avec $x = a + h$:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2).$$

Lorsque $f(x) = e^x$, cela donne en 1 :

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

Question 8 : Vu en TD : on fait les DL de $\ln(1+h)$ et $\frac{1}{1+h}$, en anticipant que puisque $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$, il suffit de faire le DL de $\frac{1}{1+h}$ à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+h)}{1+h} &\underset{h\to 0}{=} (h - \frac{h^2}{2} + o(h^2))\frac{1}{1+h} = (h - \frac{h^2}{2} + o(h^2))(1 - h + o(h)) \\ &\underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} - h^2 + o(h^2) = h - \frac{3}{2}h^2 + o(h^2).\end{aligned}$$

Notez que faire le DL de $\frac{1}{1+h}$ à l'ordre 2 n'est pas une erreur : cela génère simplement après produit des termes d'ordres au moins 3, qui sont absorbés par le reste $o(h^2)$.

Question 9 : L'équation de la tangente à la courbe est

$$y = f(a) + (x-a)f'(a).$$

Question 10 (Seulement si le reste a été fait): Vu en cours :

$$\ln(\cos x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - u^2 + o(u^2)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2 + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{4} + o(x^4). \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$