

## CONCOURS BLANC 2025

Le sujet comporte 7 pages.

On pourra dans la suite du sujet utiliser les objets python de type liste pour représenter une liste ou un tableau. Les listes entrées en argument seront non vides. Un document en annexe rappelle les fonctions usuelles de la librairie matplotlib. On considère que cette librairie a été importée avec le code :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

### PRINCIPE D'UNE MESURE D'ÉLASTICITÉ D'ADN

On s'intéresse dans cette partie du sujet à la mesure de l'effort qui s'exerce sur un brin d'ADN dont on souhaite déterminer les caractéristiques mécaniques. Le dispositif utilisé est un piège optique tel que décrit dans la première partie. La puissance du laser est imposée à une valeur constante. Le brin d'ADN est fixé à la bille par une de ses extrémités. L'autre extrémité est liée à un plateau mobile. La force agissant sur la bille est déduite par la mesure interférométrique de la position de la bille par rapport au centre du piège. Le capteur renvoie une tension  $U$  proportionnelle au déplacement et donc à la force exercée par le montage sur la bille. Pour déplacer finement l'échantillon ( $100 \mu\text{m}$  d'amplitude maximale), le plateau mobile est actionné par des cales piézo-électriques associées à une mesure capacitive de déplacement. Le déplacement est asservi, ce qui permet d'imposer une position avec une précision au nanomètre.

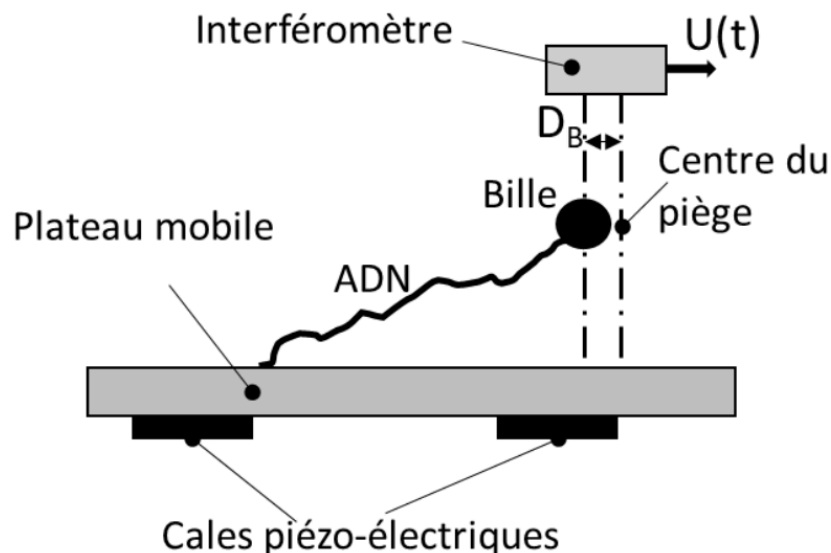


Figure 1 : dispositif de mesure

On donne figure 2 les caractéristiques de la tension  $U$  en fonction du déplacement de la bille par rapport au centre optique (chaque courbe correspond à des billes de diamètres différents).

**Question 1 :** Pour quel intervalle de déplacement de la bille  $D_B$  la tension  $U$  peut-elle être approchée par une loi affine du déplacement ? Donner alors  $a$  et  $b$  tels que :

$$U = a.D_B + b$$

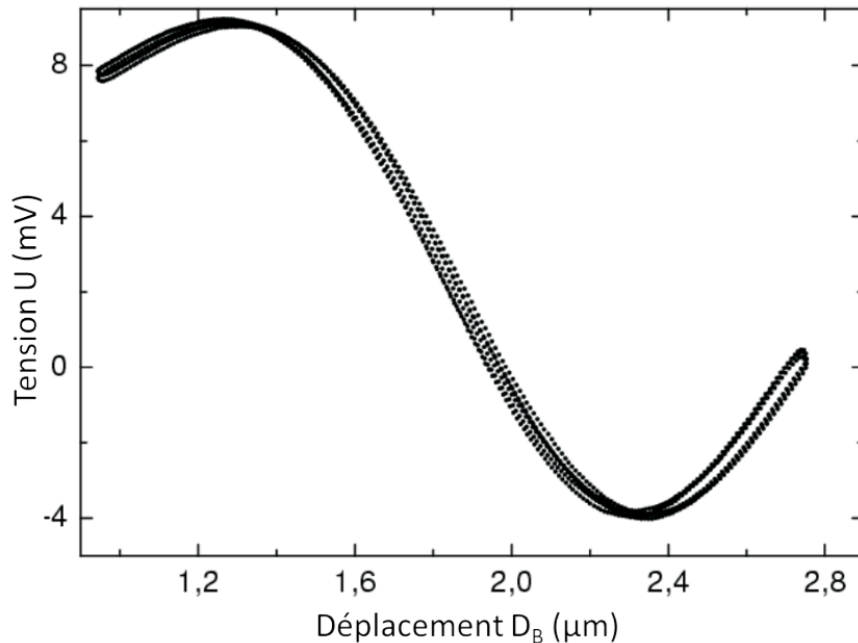


Figure 2 : tension mesurée en fonction du déplacement de la bille

Le diamètre de 1  $\mu\text{m}$  des billes est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du laser et ne permet donc pas d'utiliser simplement les règles de l'électromagnétisme, ni de l'optique géométrique pour calculer la force exercée par la lumière sur la bille. Il faut donc procéder à une calibration expérimentale. Nous allons étudier deux méthodes différentes de calibration.

#### FONCTIONS DE BASE :

Nous allons définir des fonctions qui devront être utilisées dans la suite du sujet. **Les fonctions `sum()` et `mean()` sont proscrites.**

**Question 2 :** Écrire une fonction `somme(a)` qui prend pour argument une liste de nombres flottants et retourne la somme de ses éléments.

**Question 3 :** Écrire une fonction `moyenne(a)` qui prend pour argument une liste de nombres flottants et retourne la moyenne de ses éléments.

On rappelle que la variance  $v$  est la moyenne des écarts à la moyenne au carré :

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{X})^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \right) - \bar{X}^2$$

où  $\bar{X}$  désigne la moyenne des  $x_i$ .

**Question 4 :** Écrire une fonction variance(a) qui prend pour argument une liste de nombres flottants et retourne la variance de ses éléments.

### MÉTHODE 1 : OSCILLATIONS FORCÉES DE LA BILLE DANS UN LIQUIDE

Le principe de l'expérience consiste à capturer une bille dans le piège, à faire osciller l'échantillon et enfin, à mesurer la réponse de la bille. La figure 3 représente sur un même graphique la mesure du déplacement de la bille via la tension  $U$  ainsi que le déplacement sinusoïdal imposé par les cales piézo-électriques. Dans un intervalle de fréquence  $f$  bien choisi, l'amplitude du mouvement de la bille est proportionnelle au mouvement de l'échantillon et en quadrature de phase avec le déplacement imposé, de telle sorte que :

$$|D_B| = 2\pi f \frac{\gamma}{\kappa} |D_p|$$

avec  $|D_p|$  le déplacement imposé,  $\kappa$  la raideur du piège et  $\gamma$  le coefficient de frottement de l'eau. Cette méthode donne *in fine* la constante  $K$  telle que la force recherchée  $F$  vérifie :  $F = KU$

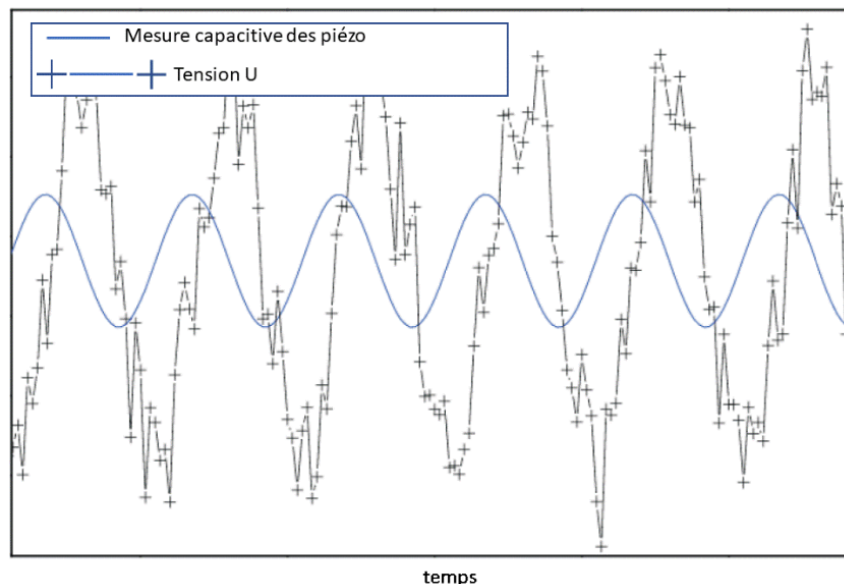


Figure 3 : évolution temporelle des tensions mesurées avec la méthode 1

On réitère la mesure pour différentes fréquences  $f$  puis l'on cherche la corrélation entre  $U$  et la fréquence  $f$  par une régression linéaire via une minimisation de l'erreur au carré comme représenté Figure 4.

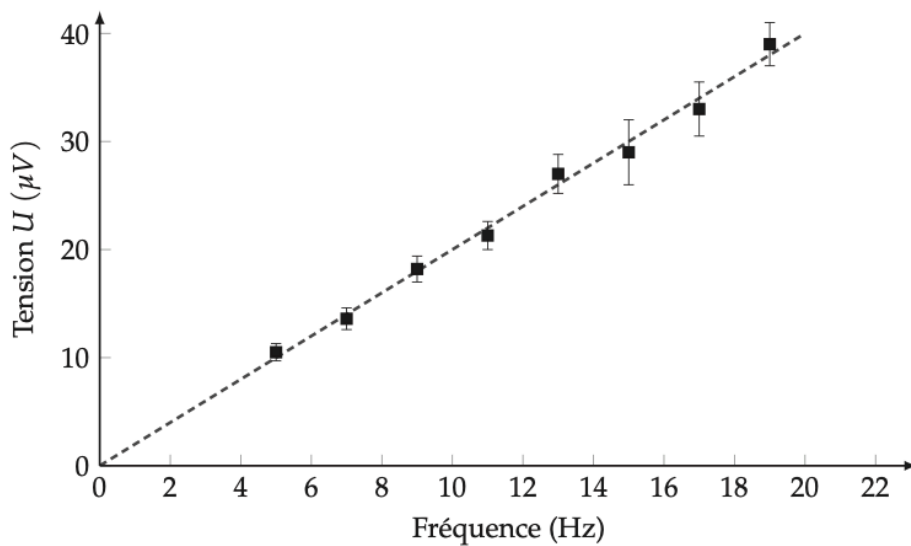


Figure 4 : tensions mesurées par la méthode 1. Régression linéaire en fonction de la fréquence.

Le principe de la méthode des moindres carrés linéaires consiste à chercher les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  qui minimisent la somme des erreurs au carré entre les données expérimentales  $y_i$  et la droite approximée  $a_0 + a_1 x_i$ . On cherche donc à minimiser  $e$  :

$$e = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

On peut montrer aisément que pour des données  $(x_i, y_i)$  connues, on peut déterminer :

$$a_1 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i \sum_{i=0}^{n-1} y_i - n \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i}{(\sum_{i=0}^{n-1} x_i)^2 - n \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}$$

et

$$a_0 = \bar{Y} - a_1 \bar{X}$$

On admet que  $a_1$  peut également s'écrire :

$$a_1 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - \bar{X})^2}$$

où  $\bar{X}$  désigne la moyenne des  $x_i$  et  $\bar{Y}$  la moyenne des  $y_i$ .

**Question 5 :** Écrire une fonction `regression_lineaire(x,y)` qui prend pour arguments deux listes de nombres flottants d'abscisses  $x$  et d'ordonnées  $y$  et qui retourne les coefficients  $a_0$  et  $a_1$  tels que définis ci-dessus.

**Question 6 :** Évaluer l'ordre de la complexité d'un appel à la fonction `regression_lineaire` en fonction de la taille des données  $n$ .

**Question 7 :** Écrire un script qui permet de tracer la figure 4 ci-dessus à partir de la liste des tensions  $U$  et des fréquences  $f$  correspondantes, les barres d'erreur ne sont pas à représenter. Une aide en fin de sujet rappelle les fonctions usuelles de la bibliothèque matplotlib.

Afin d'améliorer la corrélation on peut effectuer plusieurs mesures de la tension  $U$  pour une même fréquence  $f$ . On retiendra alors la moyenne des mesures pour une fréquence et l'on pourra évaluer la qualité de la mesure à cette fréquence en calculant la variance. On considère à présent que l'on dispose d'une liste  $f$  de dimension  $n$  et d'une liste de liste  $U$  de dimension  $n \times \ell$ .  $U[i]$  est donc la liste des  $\ell$  mesures effectuées à la fréquence  $f[i]$ .

**Question 8 :** Écrire une fonction `traitement(a)` qui prend pour argument une liste de liste de dimension  $n \times \ell$  et retourne une liste de liste de même dimension calculant la moyenne et la variance pour tout élément de  $a$ . On aura donc `len(traitement(a)[i])=2`.

## MÉTHODE 2 : ANALYSE DU MOUVEMENT BROWNIEN D'UNE BILLE PIÉGÉE

On analyse dans cette méthode le mouvement brownien de la bille. Une équation approchée de ce mouvement est donnée par l'équation de Langevin :

$$\gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_l$$

avec  $\gamma$  et  $k$  des constantes.

La force de Langevin  $F_l(t)$  correspond à un bruit blanc. Son "spectre de puissance" correspond au module de la fonction de transfert harmonique au carré. Il est noté :  $S_f(\omega)$  et a pour expression :

$$S_f(\omega) = |\hat{F}_l(j\omega)|^2 = 4\gamma k_b T$$

avec  $k_b$  la constante de Boltzmann, et  $T$  la température.

Le déplacement de la bille est mesuré par le même dispositif que pour la méthode 1 et l'on dispose de son image en tension  $U$ . On réalise une série de mesures à partir desquelles on établit numériquement la densité spectrale  $S_U$  liée à la tension  $U$ . La Figure 5 représente la densité spectrale déterminée expérimentalement et une régression de cette densité telle que nous allons l'établir.

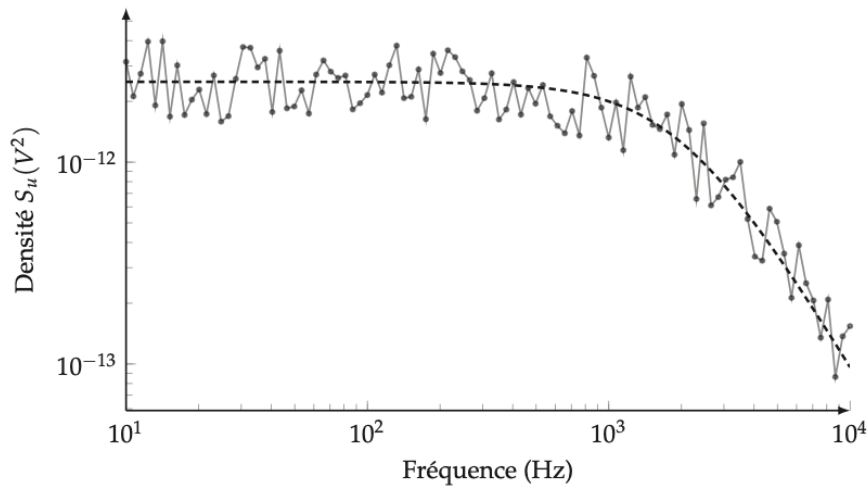


Figure 5 : densité spectrale et identification

En exploitant les équations précédentes on montre que la force exercée sur la bille est liée à la tension par :

$$F = U \sqrt{2\pi\gamma k_b T \frac{f_c}{A}}$$

avec  $A = \int S_U(f)df$  l'aire sous la courbe du spectre de puissance expérimental  $S_U$ .

On dispose d'une liste  $S_u$  et d'une liste  $f$  de dimension  $n$  qui contiennent respectivement les valeurs numériques du spectre de puissance et de la fréquence correspondante. On souhaite à présent déterminer  $f_c$  et  $A$ .

**Question 9 :** Écrire une fonction  $\text{aire}(x,y)$  qui détermine l'aire sous la courbe définie par une liste d'abscisses  $x$  et une liste d'ordonnées  $y$  de même dimension. Vous explicitez clairement la méthode choisie.

On pourrait alors réaliser une régression linéaire pour retrouver la force  $F$  précédente.

**FIN DE L'ÉNONCÉ**

## DOCUMENTATION PARTIELLE

### Fonction plot

`matplotlib.pyplot.plot(*args, **kwargs)`

*Plot lines and/or markers to the Axes. args is a variable length argument, allowing for multiple x, y pairs with an optional format string. For example, each of the following is legal :*

`plot(x, y) # plot x and y using default line style and color`

`plot(x, y, 'ko') # plot x and y using black circle markers`

`plot(x, y, 'gs') # ditto, but with green square markers`

`plot(x, y, linestyle = 'dashed') # ditto, but with dashed line and default color`

`plot(y) # plot y using x as index array 0..N-1`

`plot(y, 'r+') # ditto, but with red plusses`

En plus de la fonction plot, le module matplotlib.pyplot propose diverses fonctions dédiées à la mise en forme des graphiques. En voici quelques-unes :

- `xlabel(s)` : écrit le contenu de la chaîne s comme étiquette des abscisses.
- `ylabel(s)` : écrit le contenu de la chaîne s comme étiquette des ordonnées.
- `title(s)` : écrit le contenu de la chaîne s comme titre du graphique.
- `legend(L)` : donne une légende au graphique. L doit être une liste de chaînes : L[0] est la légende de la première courbe, L[1] de la deuxième, etc