Liste de pièges

Ces pièges vont vous paraître évidents, mais dans le feu de l'action, même les meilleurs se laissent avoir...

Piège 1 - Penser que tout est linéaire. Dans la course aux calculs, vous distribuez une somme à une fonction. Ce genre d'opération marche très rarement. Voici quelques exemples où vous l'oubliez :

$$(a+b)^2 =$$

$$\cos(a+b) =$$

$$\ln(a+b) = \text{RIEN} \quad \text{mais} \quad \ln(ab) =$$

$$\sqrt{a+b} = \text{RIEN} \quad \text{mais} \quad \sqrt{ab} =$$

Piège 2 - Mélanger les propriétés pour les exponentielles et les logarithmes . On a bien

$$\ln(ab) = \qquad\qquad \text{et } e^{a+b} =$$

mais

$$\ln(a+b) = \text{RIEN} \quad \text{et } e^a + e^b = \text{RIEN},$$

Ceci dit on peut factoriser pour avoir des formes intéressantes (cas spéciaux) : $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k})$ (somme telescopique) ou formule de demi-angle pour $1 - e^{i\theta}$ (réservé aux exponentielles complexe). De la même manière, n'inventez pas de formule pour $(\ln(x))^2$ ou e^{x^n}, qui se lit $\exp(x^n)$; et pas $(\exp(x))^n$.

Piège 3 - Mal diviser.

$$3x + 2a = x \iff 3 + 2a = 1,$$

où est le problème ?

Piège 4 - Mal gérer les fractions. Quand on simplifie dans une fraction, s'assurer que le facteur est bien commun :

$$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b},$$

N'inventez rien d'autre ! Par exemple dans $\frac{3y-2x(x^2+1)}{x^2+1}$ on ne simplifie pas par x^2+1. On peut casser une somme au numérateur mais pas au dénominateur : $\frac{1}{x^2+3} \neq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}$.

Pensez également aux parenthèses quand vous mettez au même dénominateur :

$$\frac{2x^2+3}{x+2} - 2x =$$

Piège 5 - Dériver est une opération linéaire... mais c'est tout !. On a bien $(u+v)' = u' + v'$, mais

$$(uv)' = \qquad\qquad \text{et } \left(\frac{u}{v}\right)' =$$

Enfin, pour dériver $2u$ ou $\frac{u}{3}$, utilisez $(\lambda u)' = \lambda u'$ avec λ une constante, et surtout pas les formules de dérivées de produits et fractions.

Et bien sûr, $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int f(x)\,\mathrm{d}x \int g(x)\,\mathrm{d}x$ en général (sinon, à quoi servirait l'IPP ?).

Piège 6 - Dériver une composée... sans voir une composée. N'oubliez pas que

$$(g \circ f)'(x) = \boxed{f'(x)}(g' \circ f)(x).$$

Par exemple, la dérivée de $x \mapsto \sin(x^2)$ est $x \mapsto 2x\cos(x^2)$, et pas $x \mapsto \cos(x^2)$. Cette formule prend de nombreux visages : étant donné une fonction u, on a

$$(\cos u)' = \qquad, (e^u)' = \qquad, (\operatorname{sh} u)' = \qquad, (\ln u)' = \qquad, (\frac{1}{u})' = \qquad, etc....$$

Piège 7 - Oublier que simplifier, c'est diviser. Quand on « simplifie », ou qu'on « fait passer de l'autre côté un facteur » on divise des deux côtés par la quantité... elle doit être non nulle :

$$ax = bx \iff a = b \ldots \text{ ou } x = 0!$$

De même, quand vous « faites passer » un facteur, ne vous trompez pas : on a pour $b \neq 0$ que

$$a = b \iff \frac{a}{b} = 1 \text{ et pas } 0$$

Piège 8 - Manipuler des inégalités comme des égalités. Quand on effectue une opération sur une inégalité, pensez que les choses peuvent se compliquer.

- Quand on multiplie ou on divise, penser au signe :

$$ax \leqslant bx \iff a \leqslant b \ldots \text{ si } x > 0! \quad \text{si } x < 0, \text{ on change le sens.}$$

  Par exemple, résoudre

$$(\ln(x))^2 \leqslant \ln(x)$$

  n'est pas si direct.

- Quand on compose par une fonction, vérifier qu'elle est croissante (ou décroissante, et changer le sens). Le plus typique :

$$0 < a \leqslant b \implies \frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}.$$

  Attention, il y a des fonctions ne sont ni croissantes ni décroissantes ! Par exemple

$$a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2 \text{ est FAUX en général.}$$

Piège 9 - Manipuler des égalités sans logique... et perdre l'équivalence !. Si $a = b$, on a bien $f(a) = f(b)$ (c'est une implication). Mais la réciproque est fausse ! Le plus typique :

$$x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ est FAUX,}$$

tout comme

$$x = y \iff \cos(x) = \cos(y).$$

Ainsi, si vous appliquez une fonction à une égalité, rien ne garantit que vous aboutissez aux solutions, mais seulement aux candidats possibles.

Par exemple, si le nombre $\theta \in \mathbb{R}$ vérifie : $\tan\theta = \frac{y}{x}$, alors on sait juste que $\theta \equiv \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} \quad [\pi]$.

Si la fonction est bijective, par contre, on a bien équivalence. Vous affirmez souvent que

$$x^3 = 8 \text{ DONC } x = 2.$$

avec des arguments comme « forcément » (beurk), ou encore « par identification » (à peine mieux). Pouvez-vous mieux l'expliquer ? (« par identification » n'est pas un argument).

$$\boxed{\text{Toute chaîne de formules sans logique sera fortement pénalisée}}$$

A l'inverse, il n'apporte rien de mettre des $\iff$ en cascade pour une chaîne d'égalités données par du calcul litéral.