DST 6
Corrigé

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 8 pages et 4 exercices indépendants.

Exercice 1 - Un sous-espace vectoriel des polynômes.

1. Une base de E est $(1, X, X^2, X^3)$, et la dimension de E est donc 4.

2.
- Le polynôme nul P vérifie $P(1) = P'(1) = 0$ donc il est dans F.
- Montrons que F est stable par combinaison linéaire : Soient P et Q dans F, ainsi que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)(1) = \alpha P(1) + \beta Q(1) &= \alpha P'(1) + \beta Q'(1) \text{ car } P \text{ et } Q \text{ sont dans } F.\\ &= (\alpha P + \beta Q)'(1) \text{ par linéarité de la dérivation}\end{aligned}$$

Cela prouve que $(\alpha P + \beta Q) \in F$, et donc que F est un sous-espace vectoriel de E.

3. **a.** Soit $P \in F$, que l'on écrit
$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d, \quad (a, b, c, c) \in \mathbb{R}^4.$$
Alors $P(1) = a + b + c + d$ tandis que $P'(1) = 3a + 2b + c$. Ainsi on a
$$P \in F \iff P(1) = P'(1) \iff a + b + c + d = 3a + 2b + c \iff 2a + b - d = 0.$$

b. On se sert de la question précédente :
$$\begin{aligned}F &= \{aX^3 + bX^2 + cX + d \mid (a, b, c, c) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } 2a + b - d = 0\}\\ &= \{aX^3 + bX^2 + cX + 2a + b, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}\\ &= \{a(X^3 + 2) + b(X^2 + 1) + cX, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}\\ &= \mathrm{Vect}(X^3 + 2, X^2 + 1, X)\end{aligned}$$

<u>**Remarque**</u> : A ce stade, on doit vérifier que ces 3 polynômes satisfont $P(1) = P'(1)$ pour pister d'éventuelles erreurs de calculs.
On a trouvé une famille génératrice de F : (X^3+2, X^2+1, X). Cette famille est de plus de degrés échelonnés, donc elle est libre. Ainsi, c'est une base de F. Comme elle comporte trois éléments, on peut conclure :
$$\dim(F) = 3.$$

4. **a.** La famille de polynômes $(X, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est de degrés échelonnés, elle est donc libre.

b. Ces trois polynômes sont dans F : c'est déjà montré pour X, tandis que $P_2 = (X - 1)^2$ et $P_3 = (X - 1)^3$ vérifient $P_2(1) = P_2'(1) = 0$ et $P_3(1) = P_3'(1) = 0$.
Ainsi $(X, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est une famille libre de trois éléments de F, qui est de dimension 3. Elle est donc génératrice, et c'est une base de F.

5. **a.** Pour un polynôme $P \in E$, de degré au plus 3, on a :

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + \frac{P^{(3)}}{6}(X-1)^3.$$

Donc $P \in F$ si et seulement si

$$P = P(1) + P(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + \frac{P^{(3)}}{6}(X-1)^3 = P(1)X + \frac{P''(1)}{2}(X-1)^2 + \frac{P^{(3)}}{6}(X-1)^3.$$

Ainsi, on retrouve que $F = \mathrm{Vect}(X, (X-1)^2, (X-1)^3)$.

6. Posons $G = \mathrm{Vect}(1)$, l'ensembles polynômes constant. Alors $F \cap G = \{0\}$, car parmi les polynômes constants, seul le polynôme nul vérifie $P(1) = P'(1)$. donc F et G sont en somme directe. De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. On déduit que

$$E = F \bigoplus G.$$

Remarque : Une autre méthode consistait à dire que la famille $(1, X, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est libre car échelonnée, et forme donc une base de $\dim(\mathbb{R}_3[X])$, car celui-ci est de dimension 4. Ainsi,

$$\forall P \in E, \exists! \lambda \in \mathbb{R}, \exists!(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad P = \lambda + aX + b(X-1)^2 + c(X-1)^3,$$

ce qui prouve encore que $E = F \bigoplus G$.
Dans tous les cas, il fallait éviter de résoudre manuellement le système précédent (d'inconnues λ et (a,b,c)), ce qui est possible, mais laborieux.

Exercice 2 - Une famille de plans.

1. On a alors

$$\mathcal{P}_0 = \{(-y-z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1), (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-1,1,0), (-1,0,1)).$$

Cela prouve que $\mathcal{P}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ étant non colinéaires, ils forment une famille libre, et c'est donc une base de $\mathcal{P}_0$, qui est de dimension 2. Un supplémentaire est donné par n'importe quel sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 en somme directe avec $\mathcal{P}_0$, par exemple $F = \mathrm{Vect}((1,0,0))$ convient.

2. Si $m \neq 0$, l'ensemble $\mathcal{P}_m$ ne contient pas $(0,0,0)$, ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. Calculons l'angle θ entre les normales de ces deux plans. Le plan $\mathcal{P}_m$ a pour normale $\vec{n}_1 = (1,1,1)$ et le plan d'équation $z = 0$ a pour normale $\vec{n}' = (0,0,1)$. On a alors

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 = \|\vec{n}\| \|\vec{n}'\| \cos\theta = \sqrt{3} \times 1 \times \cos\theta.$$

Ainsi, θ vérifie $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. L'angle entre ces deux plans entre 0 et π vaut donc $\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Attention : il y a deux angles entres ces deux plans ! ! si le premier vaut $\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors le deuxième vaut $\pi - \mathrm{Arccos}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Faisons apparaître l'équation d'une sphère grâce à la mise sous forme canonique :

$$x^2 + y^2 + 4y + z^2 - 2z + 2 = 0 \iff x^2 + (y+2)^2 - 4 + (z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc une sphère de centre $(0,-2,1)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

5. Commençons par prendre un point de $\mathcal{P}_m$, par exemple $A_m = (m,0,0)$. La distance de Ω à $\mathcal{P}_m$ est alors donnée par

$$d = d(\Omega, \mathcal{P}_m) = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{A_m\Omega}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|-1-m|}{\sqrt{3}} = \frac{|m+1|}{\sqrt{3}}.$$

6. Cette droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{n} = (1,1,1)$. Ainsi son équation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On a $H_m = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_m$. Ainsi, on injecte ces coordonnées dans l'équation de $\mathcal{P}_m$ pour déterminer la valeur du paramètre associé à H_m :

$$(t, -2+t, 1+t) \in \mathcal{P}_m \iff t + (-2+t) + (1+t) = m \iff t = \frac{m+1}{3}.$$

On déduit le point d'intersection : $H_m = \frac{1}{3}(m+1, m-5, m+4)$.
On vérifie le résultat de la question précédente en calculant $\|\overrightarrow{H_m\Omega}\|$. On a alors $\overrightarrow{H_m\Omega} = \frac{m+1}{3}(1,1,1)$ (ce vecteur est orthogonal à $\mathcal{P}_m$, ce qui est rassurant), puis on a $\|\overrightarrow{H_m\Omega}\| = \frac{|m+1|}{3}\|(1,1,1)\| = \frac{|m+1|}{\sqrt{3}}$, ce qui confirme le résultat précédent.

7. Soit $\mathscr{C}_m = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_m$ l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_m$.

a. Puisque $\mathcal{S}$ est la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{3}$, on distingue deux cas :

- Ou bien $d(\Omega, \mathcal{P}_m) > \sqrt{3}$, et alors pour tout $M \in \mathcal{P}_m$, $\|\overrightarrow{\Omega M}\| > \sqrt{3}$. Dans ce cas-là $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_m$ ne se coupent pas :
- Ou bien $d(\Omega, \mathcal{P}_m) \leqslant \sqrt{3}$. Dans ce cas-là $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_m$ se coupent.

Or on a vu que $d(\Omega, \mathcal{P}_m) = \frac{|m+1|}{\sqrt{3}}$. Ainsi, on a

$$d(\Omega, \mathcal{P}_m) \leqslant \sqrt{3} \iff \frac{|m+1|}{\sqrt{3}} \leqslant \sqrt{3} \iff |m+1| \leqslant 3 \iff -1-3 \leqslant m \leqslant -1+3 \iff m \in [-4, 2].$$

En conclusion,

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_m \neq \varnothing \iff m \in [-4, 2].$$

De plus, on conjecture géométriquement la nature de $\mathscr{C}_m$:

- Si $d(\Omega, \mathcal{P}_m) = \sqrt{3}$, c'est-à-dire si $m \in \{-4, 2\}$, alors $\mathscr{C}_m = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_m$ est réduit à un point : la sphère est tangente au plan.
- Si $d(\Omega, \mathcal{P}_m) < \sqrt{3}$, c'est-à-dire si $m \in]-4, 2[$, alors $\mathscr{C}_m = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}_m$ est un cercle de centre H_m, dont le rayon reste à déterminer.

b. Soit $M \in \mathscr{C}_m$. Puisque H_m est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}_m$, le triangle $\Omega H_m M$ est rectange en H_m. On applique le théorème de Pythagore :

$$\Omega H_m^2 + H_m^2 M = \Omega M^2.$$

Or, puisque $M \in \mathcal{S}_m$, on a $\Omega M^2 = 3$. Ainsi :

$$\forall M \in \mathscr{C}_m, \quad \Omega H_m = \sqrt{3 - H_m M^2} = \sqrt{3 - \frac{|m+1|^2}{3}} = \sqrt{\frac{-m^2 - 2m + 8}{3}}.$$

On vérifie que cette quantité est bien définie pour $m \in [-4, 2]$.

c. D'après ce qui précède, $\mathscr{C}_m$ est l'ensemble des points de $\mathcal{P}_m$ à distance $r_m = \sqrt{\frac{-m^2-2m+8}{3}}$ de H_m. Il s'agit donc du cercle de centre H_m contenu dans $\mathcal{P}_m$, de rayon r_m.

Exercice 3 - Exercices divers et indépendants.

1. **a.** L'ensemble H est l'espace vectoriel engeandré par le vecteur $(1,1,1,1)$ qui est non nul. Ce vecteur forme une base de H, qui est donc de dimenson 1 : il s'agit d'une droite vectorielle.

b. On écrit

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in E \mid x = y+z-t\} = \{(y+z-t, y, z, t), (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{y(1,1,0,0) + z(1,0,1,0) + t(-1,0,0,1), (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)) \end{aligned}$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E, et $((1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1))$ en est une famille génératrice. Est-ce une famille libre ? Le premier vecteur, qui a sa deuxième composante non nulle, n'est clairement pas combinaison linéaire des deux autres, qui ont leur deuxième composante nulle. Donc c'est une famille libre.
C'est une famille libre et génératrice de F, c'est donc une base de F. Comme elle est composée de 3 éléments, F est de dimension 3.

c. A partir des équations définissant G, on exprime les premières variables à partir des dernières en suivant l'algorithme du pivot :

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x-y-z+t=0 \\ 2y+2z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x-y-z+t=0 \\ y=-z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-t \\ y=-z \end{array}\right. .$$

Ainsi on a

$$G = \{(-t,-z,z,t), (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \{z(0,-1,1,0) + t(-1,0,0,1), (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((0,-1,1,0), (-1,0,0,1)).$$

La famille $(0,-1,1,0),(-1,0,0,1)$ est donc génératrice de G, de plus elle est clairement libre car ces deux vecteurs sont non colinéaires. Donc c'est une base de G, et

$$\dim(G)=2.$$

Un vecteur $(x,y,z,t)\in G$ vérifie l'équation $x+y+z+t=0$, il est donc dans F. On a donc $G\subset F$.

d. Soit $u=(x,y,z,t)\in H$, alors il s'écrit

$$u=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda),\quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Ce vecteur vérifie l'équation $x-y-z+t=\lambda-\lambda-\lambda+\lambda=0$. Donc $u\in G$. Ainsi $H\subset F$.

Remarque : On pouvait se contenter de remarquer que $(1,1,1,1)\in F$, et donc puisque F est un sous-espace vectoriel, $H=\text{Vect}(1,1,1,1)\subset F$. Ce raisonnement plus court utilise une propriété du cours...

e. Déterminons $H\cap G$. Soit $u=(x,y,z,t)\in H\cap G$, alors il s'écrit

$$u=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda),\quad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R}.$$

De plus, comme $u\in G$, il vérifie $x+y+z+t=4\lambda=0$, d'où $\lambda=0$. Ainsi $u=0$.
Finalement, $H\cap G=\{0\}$, ce qui prouve que H et G sont en somme directe.

f. On a vu que

$$\begin{cases} H \text{ et } G \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } F\\ H \text{ et } G \text{ sont en somme directe}\\ \dim(H)+\dim(G)=1+2=3=\dim(F)\end{cases}$$

On peut conclure qu'alors $F=H\bigoplus G$, c'est-à-dire que H et G sont supplémentaires dans F.

2. **a.** L'espace vectoriel E est de dimension 4, et une base en est

$$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

b. On peut montrer que F est stable par combinaison linéaire, mais autant en trouver tout de suite une famille génératrice. Soit $A\in E$, que l'on écrit

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

On a alors

$$A\in F \iff \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=0 \iff \begin{cases}a-b=0\\c-d=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}.$$

Ainsi,

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a&a\\c&c\end{pmatrix},(a,c)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},(a,c)\in\mathbb{R}^2\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right).$$

Cela prouve que F est un sous-espace vectoriel de E, et que $\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)$ en est une famille génératrice.

c. La famille $\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)$ est libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires, donc c'est une base de F, qui est de dimension 2.

d. Soit G un supplémentaire de F dans E. On a alors

$$\dim(G)=\dim(E)-\dim(F)=4-2=2.$$

Pour exhiber un supplémentaire, il suffit de trouver un sous-espace vectoriel G de dimension 2 avec $G\cap F=\{0\}$. On peut prendre

$$G=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right).$$

En effet, si $B\in G$, elle s'écrit

$$B=\begin{pmatrix}\lambda&0\\\mu&0\end{pmatrix}$$

avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Si elle est dans F, d'après ce qui précède, on a alors $\lambda=0$ et $\mu=0$, et donc $B=0$. cela prouve que $F\cap G=\{0\}$, et donc qu'ils sont en somme directe.

Exercice 4 - Exercices divers et indépendants sur les polynômes.

1. **a.** On a $P(1) = 1-2+3-12+23-18+5 = 32-32 = 0$, donc 1 est racine de P. Pour connaitre sa multiplicité, on calcule les dérivées successives de P en 1 :

$$\begin{cases} P' = 6X^5 - 10X^4 + 12X^3 - 36X^2 + 46X - 18 \text{ et donc } P'(1) = 6 - 10 + 12 - 36 + 46 - 18 = 64 - 64 = 0 \\ P'' = 30X^4 - 40X^3 + 36X^2 - 72X + 46X \text{ et donc } P''(1) = 30 - 40 + 36 - 72 + 46 = 112 - 112 = 0 \\ P^{(3)} = 120X^3 - 120X^2 + 72X - 72X \text{ et donc } P^{(3)}(1) = 120 - 120 + 72 - 72 = 0 \\ P^{(4)} = 360^2 - 240X + 72X \text{ et donc } P^{(4)}(1) = 152 \end{cases}$$

En conclusion :

$$P(1) = P'(1) = P''(1) = P^{(3)}(1) = 0 \text{ et } P^{(4)}(1) \neq 0.$$

Cela prouve que 1 est racine de multiplicité 4 de P.

b. Puisque 1 est racine de multiplicité 4 de P, on sait que P est divisble par $(X-1)^4$, mais pas par $(X-1)^5$. La division euclidienne de P par $(X-1)^4$ fournit :

$$P = (X-1)^4(X^2 + 2X + 5).$$

Le polynôme $X^2 + 2X + 5$ a pour discriminant $2^2 - 4 \times 5 = -16 < 0$, donc il est irreductible sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la décomposition de P en polynômes irreductibles sur $\mathbb{R}[X]$ est

$$P = (X-1)^4(X^2 + 2X + 5).$$

Par contre, $X^2 + 2X + 5$ a deux racines complexes : $-1 \pm 2i$. On a donc la décomposition suivante sur $\mathbb{C}[X]$:

$$P = (X-1)^4(X + 1 + 2i)(X + 1 - 2i).$$

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto e^{x^2}.$$

a. On a

$$f'(x) = 2xe^{x^2} \text{ et } f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (4x^2 + 2)e^{x^2}.$$

b. On montre la propriété par réuccrence. Notons $\mathcal{H}_n$ la propriété :

$$\mathcal{H}_n \text{ : il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}.$$

- Initialisation : la propriété est vérifiée pour $n = 0$ en posant $P_0 = 1$.
- Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Alors $f^{(n+1)}$ se calcule en dérivant le produit $x \mapsto P_n(x)e^{x^2}$:

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)e^{x^2} + 2xP_n(x)e^{x^2} = (P_n'(x) + 2xP_n(x))e^{x^2}.$$

On pose

$$P_{n+1} = 2XP_n + P_n'.$$

Il s'agit bien d'un polynôme, et ce qui précède montre qu'on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)e^{x^2}.$$

Ainsi la propriété est héréditaire, et on obtient le resultat par le principe de récurrence.

De plus, la preuve montre que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$P_{n+1} = 2XP_n + P_n'.$$

c. On a d'après la première question :

$$P_1 = 2X \text{ et } P_2 = 4X^2 + 2.$$

Pour $n \geqslant 1$, on conjecture facilement la propriété $\mathcal{A}_n$: « le polynôme P_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n. » Prouvons cela par récurrence :

- Initialisation : la propriété est vérifiée pour $n = 1$ puisque $P_1 = 2X$.

- Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Alors
$$P_{n+1} = 2XP_n + P_n'.$$
Or $\deg(2XP_n) = \deg(X) + \deg(P_n) = n+1$ d'après l'hypothèse de récurrence, tandis que $\deg(P_n') = n-1$, toujours d'après l'hypothèse. Comme ces degrés sont différents, on a
$$\deg(P_{n+1}) = n+1.$$
De plus, puisque $\deg(P_n') = n-1$, le coefficient dominant de P_{n+1} est celui de $2XP_n$, qui est $2 \times 2^n = 2^{n+1}$, d'après l'hypothèse de récurrence.
Ainsi la propriété $\mathcal{A}_n$ est héréditaire, et on obtient le resultat par le puissance de récurrence.

Remarque : Pour obtenir le coefficient dominant par une méthode plus formelle, il fallait utiliser un symbole Σ : on écrivait grâce à l'hypothèse de récurrence
$$P_n = 2^n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k,$$
ce qui fournit
$$P_{n+1} = 2XP_n + P_n' = 2^{n+1}X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 2a_{k+1}X^k + P_n',$$
et démontre ainsi que le coefficient dominant de P_{n+1} est 2^{n+1} puisque $\deg(P_n') = n-1$.

3. **a.** Le polynôme P vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geqslant 3,$$
il n'a donc aucune racine sur $\mathbb{R}$, il n'est donc pas scindé sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$. Donc P est scindé sur $\mathbb{C}$.

b. Pour le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, on utilise l'identité remarquable $a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$:
$$(X^2-2X)^2 + 3 = \left(X^2 - 2X + \sqrt{3}i\right) \times \left(X^2 - 2X - \sqrt{3}i\right).$$
Trouvons les racines (complexes) de chacun de ces polynômes, que l'on note
$$P_1 = X^2 - 2X + \sqrt{3}i \quad \text{et} \quad P_2 = X^2 - 2X - \sqrt{3}i.$$
Leurs discriminants valent $\Delta_1 = 4(1 - i\sqrt{3})$ et $\Delta_2 = 4(1 + i\sqrt{3})$.
On cherche des racines carrées complexes de ces discriminants. On peut les trouver en travaillant la forme algébrique, mais il est plus simple de noter que ces nombres complexes ont des formes exponentielles connues :
$$\Delta_1 = 8(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ et } \Delta_2 = 8(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 8e^{i\frac{\pi}{3}}.$$
Ainsi, des racines complexes de Δ_1 et Δ_2 sont donnés par
$$\delta_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } \delta_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$
Les racines de P_1 sont alors données par
$$\alpha_1 = \frac{2-\delta_1}{2} = 1 - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } \beta_1 = \frac{2+\delta_1}{2} = 1 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}},$$
tandis que celles de P_2 sont données
$$\alpha_2 = \frac{2-\delta_2}{2} = 1 - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } \beta_2 = \frac{2+\delta_2}{2} = 1 + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$
Au final, on obtient la décomposition suivante sur $\mathbb{C}$:
$$\begin{aligned}(X^2-2X)^2 + 3 &= (X-\alpha_1)(X-\beta_1)(X-\alpha_2)(X-\beta_2) \\ &= (X - 1 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}})(X - 1 - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}})(X - 1 - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}})(X - 1 + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}})\end{aligned}$$
Pour décomposer le polynôme sur $\mathbb{R}$, on regroupe les facteurs, en notant que les racines sont conjuguées :
$$\alpha_2 = \overline{\alpha_1} \text{ et } \beta_2 = \overline{\beta_1}.$$

On a ainsi

$$(X-\alpha_1)(X-\alpha_2) = (X-1+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}})(X-1+\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}) = (X^2-(2-\sqrt{2}(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}))X+|1-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}|^2).$$

Or

$$e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \text{ et } |1-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}|^2 = |(1-\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2})+i\frac{\sqrt{2}}{2}|^2 = (1-\frac{\sqrt{6}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 3-\sqrt{6}.$$

On déduit

$$(X-\alpha_1)(X-\alpha_2) = X^2-(2-\sqrt{6})X+3-\sqrt{6}.$$

Un calcul similaire fournit

$$(X-\beta_1)(X-\beta_2) = X^2-(2+\sqrt{6})X+3+\sqrt{6}.$$

En conclusion :

$$(X^2-2X)^2+3 = (X^2-(2-\sqrt{6})X+3-\sqrt{6})(X^2-(2+\sqrt{6})X+3+\sqrt{6}).$$

Remarque :

- Si on arrive jusque là dans cette question, il est obligatoire de vérifier le calcul en développant le résultat d'une part, et en développant $(X^2-2X)^2+3$ d'autre part, car cela est simple, et prend peu de temps en regard de l'effort investi. Il est alors probable que l'on constate une erreur de calcul. Si on n'arrive pas à la corriger (ou que le temps manque), on peut prévenir le correcteur en le signalant dans sa copie.
- Cette question devient plus abordable si on a en mémoire les deux points suivants, issus du cours : d'une part, les racines sont nécessairement conjuguées deux à deux car le polynôme est à coefficients réels, d'autre part pour $z\in\mathbb{C}$, on a l'identité

$$(X-z)(X-\overline{z}) = (X^2-2\operatorname{Re}(z)X+|z|^2).$$

4. **a.** Il est clair que P_n est de degré au plus $2n+1$. On développe à l'aide du binôme de Newton, en se concentrant sur le coefficient dominant :

$$P_n = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^k - \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}X^k(-i)^{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(1-(-i)^{2n+1-k})X^k.$$

- Le coefficient de degré $2n+1$ est donné par $k=2n+1$ et vaut 0, ce qui se voyait.
- Le coefficient de degré $2n$ est donné par $k=2n$ et vaut $\binom{2n+1}{2n}(1-(-i)^1) = (2n+1)(1+i)$. Il est non nul.

Ainsi, P_n est de degré $2n$, et son coefficient dominant est $(2n+1)(1+i)$.

b. On résout l'équation

$$\begin{aligned} P_n(z)=0 &\iff (z+1)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1} \\ &\iff (\frac{z+1}{z-i})^{2n+1} = 1 \\ &\iff \frac{z+1}{z-i} \text{ est une racine } (2n+1)\text{-ième de l'unité} \\ &\iff \exists k\in[\![0\,,2n]\!],\ \frac{z+1}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \end{aligned}$$

Or pour $k\in[\![0\,,2n]\!]$, on a :

$$\frac{z+1}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \iff z(1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}) = -1-ie^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

Avant de diviser, étudions le cas $k=0$: l'égalité précédente donnerait $0\times z=-1-i$, ce qui est absurde. Donc pour $k=0$, il n'existe pas de nombre z solution. Pour $k\in[\![1\,,2n]\!]$, on a :

$$z(1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}) = -1-ie^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \iff z = \frac{-1-ie^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}} = -\frac{1+ie^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}$$

Notons

$$z_k = -\frac{1+ie^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}.$$

On peut alors transformer ce nombre complexe en utilisant $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, puis la technique de l'angle moitié :

$$\begin{aligned} z_k &= -\frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{2n+1} + i\frac{\pi}{2}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}} \\ &= -\frac{e^{\frac{ik\pi}{2n+1} + \frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}} \times \frac{e^{-\frac{ik\pi}{2n+1} - i\frac{\pi}{4}} + e^{\frac{ik\pi}{2n+1} + i\frac{\pi}{4}}}{e^{-\frac{ik\pi}{2n+1}} - e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}} = -e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{2\cos(\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{4})}{2i\sin(\frac{k\pi}{2n+1})} \\ &= -e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})} \end{aligned}$$

On utilise la formule

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x),$$

ce qui donne

$$z_k = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} (\cot(\frac{k\pi}{2n+1}) - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cot(\frac{k\pi}{2n+1}))e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

où on rappelle que $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
On vérifie facilement que la fonction $x \mapsto \cot(x)$ est bijective sur $]0, \pi[$. Puisque tout les nombres $\frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in [\![1\,,2n]\!]$ sont dans $]0, \pi[$, les nombres $(1 - \cot(\frac{k\pi}{2n+1}))$ sont bien différents.
Ainsi, on a trouvé $2n$ racines distinctes : l'ensemble $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cot(\frac{k\pi}{2n+1}))e^{-i\frac{\pi}{4}}, k \in [\![1\,,2n]\!]\}$.

c. On a trouvé toutes les racines de P_n. Comme P_n a $2n$ racines complexes, comptées avec multiplicité, ces racines sont simples. En utilisant la première question sur le coefficent dominant, on déduit

$$P_n = (2n+1)(1+i)\prod_{k=1}^{2n}(X - z_k) = (2n+1)(1+i)\prod_{k=1}^{2n}(X - (\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cot(\frac{k\pi}{2n+1}))e^{-i\frac{\pi}{4}}))$$