DST 5
Correction

Exercice 1 - Une division euclidienne et ses applications.

1. L'algorithme de la division euclidienne fournit $A = BQ + R$ avec

$$Q = 2X - 1 \quad \text{et} \quad R = X - 1.$$

2. Notons $q(x) = x^2 + x - 6$, la fonction polynomiale associée à Q. Alors on a par un calcul de discriminant :

$$q(x) = 0 \iff x = -3 \text{ ou } x = 2.$$

Ainsi f est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-3, 2\}$, comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas.
Remarque : On peut aussi noter Q la fonction $x \mapsto x^2 + x - 6$, la confondant alors avec le polynôme, sans préjudice.

3. En identifiant le polynôme A et la fonction associée, on déduit de **Q1** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2x^3 + x^2 - 12x + 5 = (x^2 + x - 6)(2x - 1) + x - 1.$$

Ainsi, on a

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 2x - 1 + \frac{x-1}{x^2 + x - 6}.$$

On déduit le résultat en posant $g_1(x) = 2x - 1$ et $g_2 = x - 1$.

4. On a

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x^2 + x - 6} = 0,$$

et donc, lorsque $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$, on a :

$$f(x) = g_1(x) + o(1)$$

Cela prouve que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$, la courbe de f, à la fois au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. Pour déterminer leur position relative, on étudie le signe de $f - g_1$ sur I, en notant que

$$\forall x \in I, \quad f(x) - g_1(x) = \frac{x-1}{x^2 + x - 6}.$$

On forme le tableau de signe suivant :

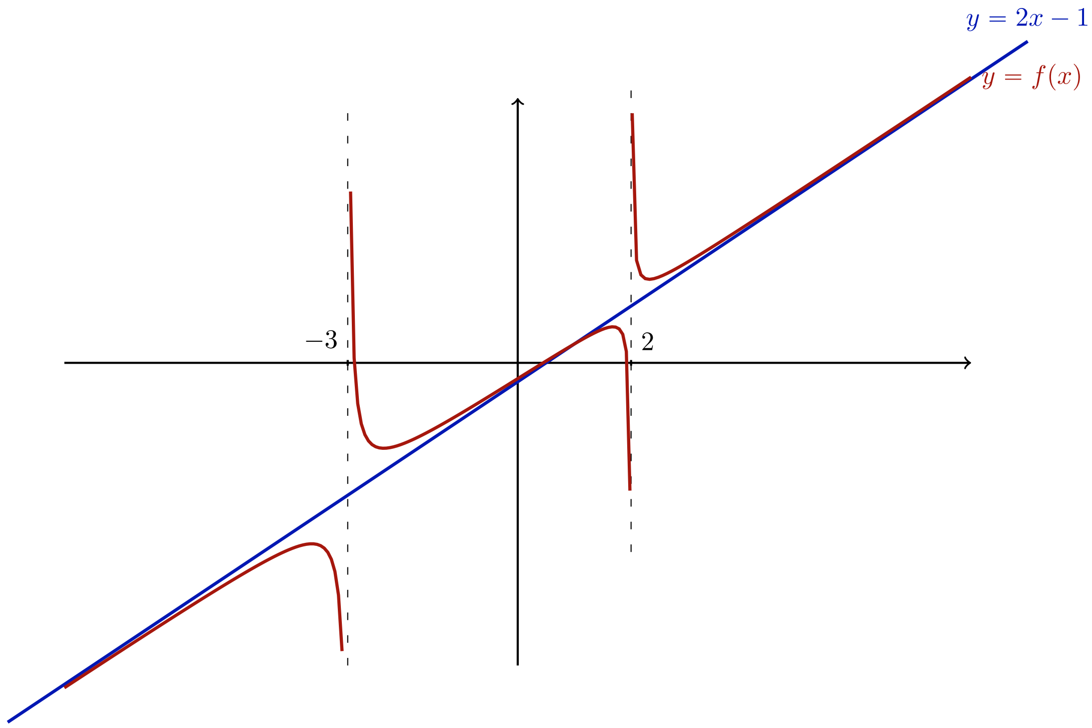
x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x - 1$			$-$		0		$+$		
$x^2 + x - 6$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$\frac{x-1}{x^2+x-6}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

Ce tableau permet de répondre à la question :

- Sur $]-\infty, -3[$, la droite $\mathcal{D}$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.
- Sur $]-3, 1[$, la droite $\mathcal{D}$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

- En 1, la droite $\mathcal{D}$ coupe $\mathscr{C}_f$.
- Sur $]1,2[$, la droite $\mathcal{D}$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.
- Sur $]2,+\infty[$, la droite $\mathcal{D}$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

Cette analyse est confirmée par le graphique suivant :



5. La fonction f étant continue sur son domaine de définition, elle y admet des primitives. On utilise le résultat précédent :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 2x - 1 + \frac{x-1}{x^2+x-6} = 2x - 1 + \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}.$$

On réalise une décomposition en éléments simples pour le deuxième terme :

$$\frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = \frac{1/5}{x-2} + \frac{4/5}{x+3}.$$

On a ainsi

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{4}{x+3}\right)$$

On déduit que

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = x^2 - x + \frac{1}{5}\left(\ln|x-2| + 4\ln|x+3|\right).$$

Exercice 2 - Puissances d'une matrice et suites couplées. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. On a $A = 3U + 2I_3$.

2. On a après quelques calculs :

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3U \quad \text{et} \quad U^3 = U \times U^2 = U \times (3U) = 3U^2 = 9U$$

Ainsi, on conjecture la proposition $\mathcal{P}_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U^n = 3^{n-1}U.$$

On prouve cette formule par récurrence :

- Initialisation : On a $3^{1-1} = 1$, donc la proposition est vraie pour $n = 1$.
- Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a alors
$$U^{n+1} = U \times U^n = U \times (3^{n-1}U) = 3^{n-1}U^2 = 3^n U = 3^{(n+1)-1}U,$$
et la propriété est alors vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Puisque U et I_3 commutent, on applique la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned}
A^n = (3U + 2I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k U^k 2^{n-k} I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k U^k 2^{n-k} \quad \text{car} \quad I_3^{n-k} = I_3 \quad \text{et } MI_3 = M \quad \text{pour toute matrice } M \\
&= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k U^k 2^{n-k} \quad \text{en “détachant” le premier terme} \\
&= 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} \times (3^{k-1}U) \quad \text{d'après } \mathbf{Q2} \\
&= 2^n I_3 + \frac{1}{3} U \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{2k} 2^{n-k} \\
&= 2^n I_3 + \frac{1}{3} U \left((9+2)^n - 2^n\right) \quad \text{d'après le binôme de Newton} \\
&= 2^n I_3 + \frac{11^n - 2^n}{3} U.
\end{aligned}$$

On peut revenir à une forme matricielle exlicite ou se contenter de cette forme synthétique.

4. Lorsque $n = -1$, on obtient :
$$2^n I_3 + \frac{11^n - 2^n}{3} U = \frac{1}{2} I_3 - \frac{3}{22} U = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{22} & -\frac{3}{22} \\ -\frac{3}{22} & \frac{4}{11} & -\frac{3}{22} \\ -\frac{3}{22} & -\frac{3}{22} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

En multipliant cette matrice par A, on trouve bien I_3, ce qui confirme que cette matrice est A^{-1}.

5. **a.** Introduisons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. On a alors $X_{n+1} = AX_n$, et donc par récurrence directe $X_n = A^n X_0$. Ainsi :
$$X_n = \left(2^n I_3 + \frac{11^n - 2^n}{3} U\right) X_0 = 2^n X_0 + \frac{11^n - 2^n}{3} U X_0 = 2^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} + \frac{11^n - 2^n}{3} \begin{pmatrix} u_0 + v_0 + w_0 \\ u_0 + v_0 + w_0 \\ u_0 + v_0 + w_0 \end{pmatrix}$$

On déduit que
$$\begin{cases} u_n = 2^n u_0 + \frac{11^n - 2^n}{3}(u_0 + v_0 + w_0) \\ v_n = 2^n v_0 + \frac{11^n - 2^n}{3}(u_0 + v_0 + w_0) \\ w_n = 2^n w_0 + \frac{11^n - 2^n}{3}(u_0 + v_0 + w_0) \end{cases}$$

Remarque : On peut essayer de laisser les valeurs 2^n et 11^n bien apparentes dans le calcul, car elles sont reliées à des propriétés de la matrice A^n : les “valeurs propres” de A, qui seront explorées l'année prochaine, sont en effet 2 et 11.

b. Avec ces conditions initiales, on a les expressions suivantes :
$$\begin{cases} u_n = 2^n + \frac{11^n - 2^n}{3} = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{11^n}{3} \\ v_n = \frac{11^n - 2^n}{3} \\ w_n = \frac{11^n - 2^n}{3} \end{cases}$$

Ces trois suites sont équivalentes à $\frac{11^n}{3}$, puisque
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\frac{11^n}{3}} = \frac{v_n}{\frac{11^n}{3}} = \frac{w_n}{\frac{11^n}{3}} = 1.$$

Remarque : La situation est sensiblement la même pour d'autres valeurs initiales, sauf lorsque $u_0 + v_0 + w_0 = 0$. Cela vient du fait qu'on a alors $AX_0 = 2X_0$, relation qui sera explorée l'année prochaine dans le cadre des “vecteurs propres”.

Exercice 3 - Etude d'un point critique. Soient les fonctions

$$p(x) = e^{2x} - 1 - 2x - \frac{4}{3}\sin^3 x \quad \text{et} \quad q(x) = \ln(1 + x^2).$$

1. On a $1 + x^2 \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. Ainsi la fonction q est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en 0. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. On a $\ln(1 + u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et donc $q(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

3. On connait le DL suivant, en 0 :

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2),$$

et donc, en posant $u = x^2$, on a en 0 :

$$q(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

4. On réalise un DL à l'ordre 4 de p en 0. Au prélabale, on fait le DL de chacun des termes :

$$e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$$

donc, avec $u = 2x$ qui tend vers 0 lorsque $x \to 0$:

$$\begin{aligned} e^{2x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

On a également

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))$$

et donc

$$\sin^3 x = x^3(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))^3 = x^3 + o(x^4).$$

En ajoutant ces DL, on obtient

$$p(x) \underset{x\to 0}{=} 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

et donc par quotient :

$$f(x) = \frac{2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \frac{2 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \left(2 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = 2 + \frac{5}{3}x^2 + o(x^2)$$

5. Puisque f admet un DL à l'ordre 1 en 0, on déduit que f se prolonge en une fonction continue en posant $f(0) = 2$, et que cette fonction est dérivable, avec $f'(0) = 0$.

6. D'après la question précédente, f a un point critique en 0. Puisque le coefficient d'ordre 2 du DL de f en 0 est strictement positif, il s'agit d'un minimum local.

Exercice 4 - Quelques développements asymptotiques (questions indépendantes).

1. **a.** On a $H = F(x^2)$.

b. On a $H'(x) = 2xF'(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$. On effectue un DL en 0, à l'ordre 7 :

$$H'(x) = 2x(1 + x^4)^{-1/2} = 2x(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)) = 2x - x^5 + o(x^7).$$

Ainsi, par primitivation, on déduit le DL suivant en 0, à l'ordre 8 :

$$H(x) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8).$$

2. On pose $x = 1 + h$, de sorte que, lorsque $h \to 0$:

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(1 + h)}{1 + h} = (h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)) \times (1 - h + h^2 + o(h^2)) = h - \frac{3}{2}h^2 + \frac{11}{6}h^3 + o(h^3).$$

3. On forme le quotient

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = n^2 u_n = \frac{\ln(n)^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée.}$$

Cela montre que $u_n = o(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 5 - Une famille de droites.

1. Cette fonction est bien définie tant que $1-(m^2-1)x \neq 0$. Ainsi :
   - Si $m \in \{-1,1\}$, la fonction f_m est définie sur $\mathbb{R}$, elle est par ailleurs constante, égale à m.
   - Si $m \notin \{-1,1\}$, on pose $x_m = \frac{1}{m^2-1}$. La fonction f_m est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{x_m\}$. Notons que $x_m \neq 0$. Ainsi la fonction f_m est bien définie sur un voisinage de 0, par exemple $]-|x_m|,|x_m|[$.
2. On utilise le DL en 0 : $\frac{1}{1-u} = 1+u+o(u)$, qui fournit
$$f_m(x) = m(1+(m^2-1)x+o(x)) = m+m(m^2-1)x+o(x).$$
Ainsi, f_m a pour tangente en 0 la droite $\mathcal{D}_m$ d'équation $y = m+m(m^2-1)x$.
3. On a clairement $f_m(0) = m$ et $f'_m(0) = m(m^2-1)$. Or $\mathcal{D}_m$ a pour équation
$$y = f_m(0)+xf'_m(0) = m+m(m^2-1)x,$$
on retrouve ainsi le résultat précédant.
4. On sait que la distance de I à $\mathcal{D}_m$ est donnée par
$$d(I,\mathcal{D}_m) = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AI}}{\|\vec{n}\|},$$
où A est un point de la droite $\mathcal{D}_m$ et $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}_m$.
La droite $\mathcal{D}_m$ ayant pour équation
$$m(m^2-1)x-y+m = 0,$$
un vecteur normal à $\mathcal{D}_m$ est donnée par $\vec{n} = \begin{pmatrix} m(m^2-1) \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors $\|\vec{n}\| = \sqrt{m^2(m^2-1)^2+1}$.
De plus, on trouve un point de $\mathcal{D}_m$ en prenant par exemple son intersection avec l'axe des ordonnées $x=0$, ce qui donne : $A = \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$. On a alors
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} m(m^2-1) \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -m \end{pmatrix} = m(m^2-1)+m = m^3,$$
puis
$$d(I,\mathcal{D}_m) = \frac{m^3}{\sqrt{m^2(m^2-1)^2+1}},$$
5. Puisque le rayon du cercle vaut 1, la droite $\mathcal{D}_m$ est tangente à $\mathscr{C}$ si et seulement si $d(I,\mathcal{D}_m) = 1$. Or on a :
$$d(I,\mathcal{D}_m) = 1 \iff \frac{m^3}{\sqrt{m^2(m^2-1)^2+1}} = 1 \iff m^2(m^2-1)^2+1 = m^6.$$
On pose $M = m^2$. On a alors
$$m^2(m^2-1)^2+1 = m^6 \iff M(M-1)^2+1 = M^3 \iff 2M^2-M-1 = 0.$$
Cette équation a deux solutions : $M = 1$ et $M = -\frac{1}{2}$. Comme $M = m^2$, on élimine la solution négative et on a donc deux solutions $m = 1$ et $m = -1$. Dans ces deux cas, la fonction est constante.

Exercice 6 - Une équation géométrique.

1. **a.** Un vecteur directeur de (AB) est donné par $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour trouver l'équation cartésienne de (AB), on écrit que $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur (AB) si et seulement si $[AM,\vec{u}] = 0$. Or on a :
$$[AM,\vec{u}] = 0 \iff [\begin{pmatrix} x+1 \\ y+3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}] = 0 \iff 2x-y-1 = 0.$$
Une équation paramétrique de (AB) est donnée par
$$\left\{\begin{array}{l} x = -1+t \\ y = -3+2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

b. Les quantités étant positives, on a $AM = 2BM \iff AM^2 = 4BM^2$. Or on a

$$AM^2 = (x+1)^2 + (y+3)^2 \quad \text{et } BM^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2$$

On déduit la condition en injectant dans $AM^2 = 4BM^2$ et en développant.

c. On utilise la mise sous forme canonique :

$$x^2 - 6x + y^2 - 10y = -14 \iff (x-3)^2 - 9 + (y-5)^2 - 25 = -14 \iff (x-3)^2 + (y-5)^2 = 20.$$

On reconnait l'équation d'un cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de rayon $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Par ailleurs, on a $2 \times 3 - 5 - 1 = 0$, ainsi les coordonnées de Ω vérifient l'équation de (AB), et donc $\Omega \in (AB)$.

2. **a.** On a

$$\|\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\|^2 = AG^2 + GM^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\|^2 = BG^2 + GM^2 + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM}.$$

b. Comme ci-dessus on a $AM = 2BM \iff AM^2 = 4BM^2$. En utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned} AM^2 = 4BM^2 &\iff AG^2 + GM^2 + 2\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM} = 4\left(BG^2 + GM^2 + 2\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM}\right). \\ &\iff 3GM^2 = AG^2 - 4BG^2 + 2\left(\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GM} - 4\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM}\right) \\ &\iff 3GM^2 = AG^2 - 4BG^2 + 2\left(\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{BG}\right) \cdot \overrightarrow{GM} \end{aligned}$$

c. Puisque $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}$, on a

$$\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$$

d. Par construction, on a $\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}$, et donc d'après **Q2b** :

$$AM = 2BM \iff 3MG^2 = AG^2 - 4BG^2.$$

On a $AG^2 = \frac{16}{9}AB^2$. De plus, $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et donc $BG^2 = \frac{1}{9}AB^2$. Ainsi

$$AG^2 - 4BG^2 = \frac{16-4}{9}AB^2 = \frac{4}{3}AB^2.$$

En conclusion

$$AM = 2BM \iff MG^2 = \frac{4}{9}AB^2.$$

Il s'agit du cercle de cente G et de rayon $\frac{2}{3}AB$