DST 4

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Vous êtes jugés sur le fond comme sur la forme : la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera notamment à soigner la présentation, à mettre en évidence les principaux résultats et à respecter l'ordre des questions sur sa copie.

Ce sujet comporte 3 pages et 4 exercices indépendants

Exercice 1 :

Partie I :

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + 2x\,y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2) On désigne par f la solution du problème de Cauchy. Déterminer la dérivée f' ainsi que la dérivée seconde f''.

3) Déterminer $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|$

4) **a)** Enoncer le théorème des accroissements finis.

b) Soit ϵ un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un réel η strictement positif, que l'on explicitera, tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

5) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = f(x) \times P_n(x)$$

où $f^{(n)}$ est la dérivée n^{eme} de f et P_n une fonction polynomiale de degré n.

Partie II :

Dans cette partie, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + 2x\,y = \dfrac{2x+9}{x^2+8x+17}\, e^{-x^2} \\ y(-4) = 1 \end{cases}$$

1) Justifier que : $x \longmapsto \frac{2x+9}{x^2+8x+17}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x+9}{x^2+8x+17} = \frac{2x+8}{x^2+8x+17} + \frac{1}{x^2+8x+17}$

3) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \longmapsto \frac{2x+9}{x^2+8x+17}$

4) Résoudre le problème de Cauchy.

Partie III :

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 2\mathrm{sh}(x) \\ y(1) = -\frac{1}{4}e^{-1} + \frac{7}{2}e^{1} \\ y'(1) = \frac{1}{4}e^{-1} + \frac{13}{2}e^{1} \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit m un réel et $(\mathcal{S}_m)$ le système suivant :

$$(\mathcal{S}_m) : \begin{cases} x & + & y & - & mz & = & m-1 \\ mx & + & y & + & m^2z & = & 1 \\ m^2x & + & my & - & m^2z & = & 0 \end{cases}$$

1) Soit $m = 1$.

Résoudre $(\mathcal{S}_1)$.

2) Résoudre le système $(\mathcal{S}_m)$ en discutant suivant la valeur du paramètre réel m (vous vérifierez que pour $m = 1$, vous retrouvez le résultat de la question 1).

Exercice 3 :

Partie I : Convergence

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{10}\,(u_n^3 - 7u_n^2 + 10u_n) \\ u_0 \ = \ 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On considère la fonction $f : x \longmapsto x + \frac{1}{10}\,(x^3 - 7x^2 + 10x)$ définie sur $[1\,;3]$

a) Montrer que : $f' : x \longmapsto \frac{1}{10}\,(3x^2 - 14x + 20)$

b) En déduire les variations de f sur $[1\,;3]$.

c) Déterminer $f\big([1\,;3]\big)$ et en déduire que $f\big([1\,;3]\big) \subset [1\,;3]$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

3) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite notée l.

4) Justifier que l satisfait l'équation : $l^3 - 7l^2 + 10l = 0$

5) En déduire la limite l.

Partie II : Vitesse de convergence

1) Montrer que : $\max\limits_{t\in[1;3]} |f'(t)| = \frac{9}{10}$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - l| \leq 0{,}9|u_{n-1} - l|$

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq (0{,}9)^n$

4) En déduire à partir de quel rang n on peut affirmer que $|u_n - l| \leq 10^{-5}$

(Valeurs : $\ln(10) \approx 2{,}3$ et $\ln(0{,}9) \approx -0{,}1$)

Exercice 4 :

Partie I : Quelques limites

Soient $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{9x^2+2x+5} - (3x+1)}{x-1}$ et $g : x \longmapsto \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{x}$

1) Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2) La fonction f peut-elle être prolongée par continuité ?
   Si oui, donner un tel prolongement. Si non, justifier.
3) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
4) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
5) La fonction g peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?
   Si oui, donner un tel prolongement. Si non, justifier.

Partie II : Primitive…

On se propose de déterminer une primitive de $h : x \longmapsto \sqrt{9x^2+2x+5}$ sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt{9t^2+2t+5} = \sqrt{9\left(t+\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{44}{9}}$$

2) En effectuant le changement de variable $u = \frac{9t+1}{\sqrt{44}}$, montrer que :

$$\int^{x} \sqrt{9t^2+2t+5}\, dt = \frac{44}{27} \int^{\frac{9x+1}{\sqrt{44}}} \sqrt{u^2+1}\, du$$

3) On admettra dans la suite que :

$$u = \mathrm{sh}(w) \iff w = \ln(u + \sqrt{u^2+1})$$

   Effectuer le changement de variable $u = \mathrm{sh}(w)$ et montrer que :

$$\frac{44}{27} \int^{\frac{9x+1}{\sqrt{44}}} \sqrt{u^2+1}\, du = \frac{44}{27} \int^{b(x)} \mathrm{ch}^2(w)\ dw$$

$$\text{avec, } b(x) = \ln\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}} + \sqrt{\left(\frac{9x+1}{\sqrt{44}}\right)^2 + 1}\right)$$

4) On admettra que :
   - $\forall w \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(w) = \frac{1}{2}\,(\mathrm{ch}(2w)+1)$
   - $\forall y \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}\left(2\ln(y+\sqrt{y^2+1})\right) = 2y\sqrt{y^2+1}$

   En déduire que :

$$\int^{x} \sqrt{9t^2+2t+5}\, dt = \frac{1}{54}\left((9x+1)\sqrt{(9x+1)^2 + 44} + 44\ln\left(9x+1+\sqrt{(9x+1)^2 + 44}\right)\right)$$